

3. A.J. KONING, S. HILAIRE: *The TALYS Nuclear Model Code, version 0.49* – 2002.
4. R. DÓCZI, V. SEMKOVA, A. FENYVESI, N. YAMAMURO, Cs.M. BUGZKÓ, J. CSIKAI – Nucl. Sci. and Eng. 129(1998) 164
5. Y. IKEDA, C. KONNO, K. OISHI, T. NAKAMURA, H. MIYADE, K. KAWADE, H. HAMAMOTO, T. KATOH – JAERY-1312, 1988.
6. A.A. FILATENKOV, S.V. CHUVAEV, V.N. AKSENOV, V.A. YAKOVLEV, A.V. MAYSHENKOV, S.K. VASSIL'EV, M. AVRIGEANU, V. AVRIGEANU, D.L. SMITH, Y. IKEDA, A. WALLNER, W. KUTSCHERA, A. PRILLER, P. STEINER, H. VONAH, G. MERTENS, W. ROCHOW – IAEA Report INDC(CCP)-402, Vienna, 1997; KRI Report RI-252, St. Petersburg, 1999.

A SZIVÁRVÁNY FIZIKÁJA – II. Az esőcseppek fényszórási jelenségei

Cserti József
Eötvös Loránd Tudományegyetem,
Komplex Rendszerek Fizikája Tanszék

A szivárvány és a fény hullámtermészete

Közismert a fény két alapvető, a fény transzverzális hullámtermészetéből fakadó tulajdonsága. Az egyik a fény polarizációja, a másik az interferenciaképessége. A szivárvány jelenségének jobb megértésében nem tekinthetünk el a fénynek e két tulajdonságától. Történeti szempontból ezen a téren az első előrelépés a csodagyerek *Thomas Young* nevéhez fűződik, aki a szivárványnak a fénysugarak *interferenciájára* épülő elméletét 1804-ben dolgozta ki. Röviddel ezután, 1808-ban a francia *Étienne-Louis Malus* mérnöknek, és tőle függetlenül 1815-ben az angol *David Brewster*nek a polarizációval kapcsolatos megfigyelései rámutattak Young elméletének hiányosságaira. A polarizáció jelenségét később *Augustin-Jean Fresnel* is tanulmányozta, és ő közölte 1817-ben a róla elnevezett *Fresnel-formulákat*. A Young-elmélet döntő cáfolatát végül 1838-ban *Airy* adta meg, aki a szivárványt *elhajlási* (diffrakciós) jelenségként értelmezte. Mindenesetre, Young úttörő szerepe vitathatatlan, hiszen a *Newton* óta kialakult vitában, miszerint a fény részecske- vagy hullámtermészetű-e, az ő munkássága meghatározó jelentőségűnek számított. A kérdésről kitűnő történeti áttekintés található *Simonyi* könyvében [5]. Ugyanakkor, az *Airy*-elmélet sem tartalmazta a fény polarizációját, és a későbbi kutatások alapján kiderült elméletének közelítő jellege és érvényességi határa is.

Ebben a fejezetben a szivárvány jelenségében a polarizáció szerepét tekintjük át, majd a hazai irodalomban kevésbé ismert Young- és *Airy*-elmélet alapjait ismertetjük, és szólnunk azok hiányosságairól is. Talán elfogultság nélkül állíthatjuk, hogy Young és különösen *Airy* elmélete tudománytörténetileg is nagyszerű szellemi teljesítménynek tekinthető, és így azok részletesebb bemutatása nem hiábavaló.

A polarizáció

A fény egyik fontos jellemzője a polarizáció. A fény transzverzális hullám, melyben mind az elektromos, mind a mágneses tér merőleges a fény terjedésének irányára. Egy törőfelületre érkező fénysugár elektromos térerőssége mindig felbontható a beesési síkkal párhuzamos és arra merőleges komponensre.

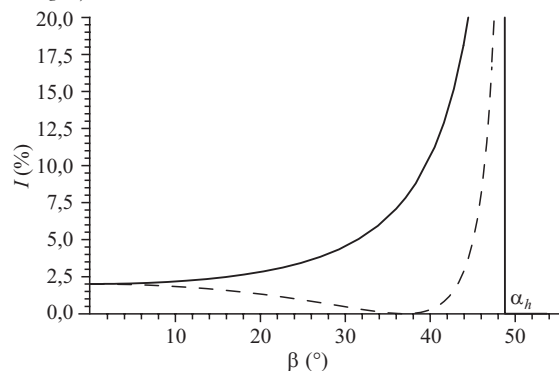
Általánosan a fény e két független polarizáció „keveréke”. Például a napfényben a kétféle polarizáció egyenlő mértékben, véletlenszerűen van jelen, ezt polarizálatlan vagy „természetes” fénynek is szokás nevezni. A visszavert fénysugár intenzitása a párhuzamosan és merőlegesen polarizált fényre a Fresnel-formulák alapján (lásd pl. [16, 17]):

$$I_{\parallel} = I_0^{\parallel} \frac{\operatorname{tg}^2(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg}^2(\alpha + \beta)}, \quad (11)$$

$$I_{\perp} = I_0^{\perp} \frac{\sin^2(\alpha - \beta)}{\sin^2(\alpha + \beta)}, \quad (12)$$

ahol I_0^{\parallel} és I_0^{\perp} a bejövő fény intenzitása párhuzamosan, illetve merőlegesen polarizált fényre, α és β pedig a beesési és a törési szög, melyek teljesítik az (1) Snellius–Descartes-törvényt. A 8. ábra mutatja a visszavert fény intenzitását β függvényében a kétféle polarizációnál. Az ábrán látható, hogy párhuzamosan polarizált fény esetén a visszavert fény intenzitása egy bizonyos β_B szögnél zérussá válik. Ennek oka, hogy a (11) képlet nevezője végtelen, ha $\alpha + \beta = \pi/2$. Felhasználva az (1) Snellius–Descartes-törvényt azt kapjuk, hogy a $\beta_B = \arctg n$ *Brewster-szögnél* lesz a visszaverődő párhuzamosan polarizált fény intenzitása zérus. A három alapszínre a Brewster-szög: $\beta_B = 36,9^\circ$ (kék), $36,8^\circ$ (zöld), $36,7^\circ$ (vörös).

8. ábra. A visszavert fény I intenzitása (%-ban) merőlegesen (folytonos vonal) és párhuzamosan (szaggatott vonal) polarizált vörös színű fényre a β törőszög (fokokban mérve) függvényében. A függőleges vonal a görbék értelmezési tartományának határát, a teljes visszaverődés α_h határszögét jelöli.



Az egyenletek, ábrák, táblázatok és irodalom számozása a többi részekben lévőkre való egyértelmű hivatkozás érdekében folyamatos.

Az 1. táblázatban megadott törésmutatók alapján a teljes visszaverődés kék, zöld és vörös színeknek megfelelő határszögei: $\alpha_b = \arcsin(1/n) = 48,8^\circ, 48,5^\circ, 48,3^\circ$. A 3. ábra szerinti β szög Cartesius-sugármenetre és főtízvárványra a három színnek megfelelően rendre a $\beta_2 = 40,4^\circ$ (kék), $40,1^\circ$ (zöld), $39,8^\circ$ (vörös) értékeket veszi fel (a 2-es index $p = 2$ -re utal). Innen látszik, hogy egyik esetben sem lép fel teljes visszaverődés a vízcsepp határán. Hasonló a helyzet mellékszívárványra is, ekkor a három alapszínre $\beta_3 = 45,6^\circ$ (kék), $45,4^\circ$ (zöld), $45,1^\circ$ (vörös). Mivel a vízcseppben belül nincs teljes visszaverődés, az észlelt kilépő fény intenzitása jelentősen lecsökken a bejövőhöz képest. Látható, hogy a β_2 szög Cartesius-sugármenetre és főtízvárványra közel esik a fenti Brewster-szögekhez. Így a párhuzamosan polarizált fény intenzitása jóval kisebb a merőlegesen polarizálthoz képest.

A vízcseppből kilépő fényben a kétfajta polarizáció arányát meghatározhatjuk például a polarizálatlan napfény esetében. Feltehetjük, hogy a bejövő egységnyi intenzitású fényben a párhuzamosan és merőlegesen polarizált rész intenzitása azonos. A (11) és (12) Fresnel-formulákat használva a fénynek a vízcsepp felületén való törése, $p-1$ számú visszaverődése, és ismételt fénytörése után a kilépő fény intenzitásának aránya a bejövőhöz képest:

$$I = I_{\parallel} + I_{\perp}, \quad \text{ahol}$$

$$I_{\parallel} = \left[1 - \frac{\operatorname{tg}^2(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg}^2(\alpha + \beta)} \right]^2 \left(\frac{\operatorname{tg}^2(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg}^2(\alpha + \beta)} \right)^{p-1}, \quad (13)$$

$$I_{\perp} = \left[1 - \frac{\sin^2(\alpha - \beta)}{\sin^2(\alpha + \beta)} \right]^2 \left(\frac{\sin^2(\alpha - \beta)}{\sin^2(\alpha + \beta)} \right)^{p-1}.$$

A képletek alapján Cartesius-sugármenet és főtízvárvány esetén merőlegesen polarizált fényre a kilépő és belépő fénysugár intenzitásának aránya körülbelül 9%, míg párhuzamosan polarizált fényre ez az érték 0,4%. Így a szivárványból szemünkbe gyakorlatilag csak merőlegesen polarizált fénysugarak érkeznek. Egy lineáris polárszűrőn keresztül nézve a szivárvány egy-egy szakasza eltűnik, ha a polárszűrőt 90° -kal elforgatjuk.

A szivárvány polarizációs sajátosságainak mérése meglehetősen függ a szerencsétől, mivel a tünemény észlelhetősége megjósolhatatlan. Egy szivárvány fölbukkanásakor általában nincs kéznél polariméter, mikor pedig van nálunk polariméter, akkor meg többnyire nincs szivárvány. Így szabályosan vadászni kell rá, miközben magunkkal hurcoljuk a polariméterünket. Ez az oka annak, hogy csak 2003-ban sikerült először képalkotó „polarimétervégre” kapni egy szivárványt [18, 19], amikor 180° látószögű képalkotó polarimetriával elkészült egy tengerparti kettős ívű (fő és mellék) szivárvány polarizációs mintázata a spektrum vörös, zöld és kék tartományában. Ennek elemzésével számos korábbi számítás helyességét lehetett „látványosan” igazolni.

A szivárványból a szemünkbe érkező fény intenzitásának szögfüggéséhez a differenciális hatáskeresztmetszet meg kell szorozni a (13) polarizációs tényezővel. Ugyanakkor a szivárványnak a (8) képlettel adott szöge változatlan, hiszen a differenciális hatáskeresztmetszet szingularitásának helyét a polarizációs tényező nem módosítja.

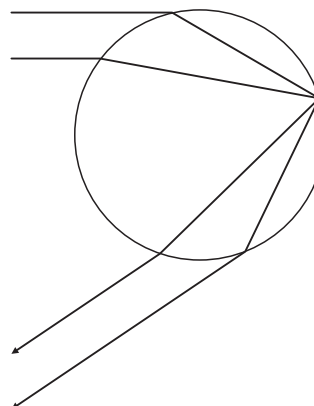
A vízcseppből kilépő fény intenzitása a (13) szerinti polarizációs tényező miatt hatványszerűen csökken p növelésével. Ezért a természetben a magasabb rendű szivárványokat ($p > 3$) nehezen figyelhetjük meg. Ráadásul az égbolt háttérének fénye, illetve a vízcsepp felületéről közvetlenül ($p = 0$) és a vízcseppben áthaladó ($p = 1$) fény intenzitása is elnyomja a magasabb rendű szivárványok intenzitását. A Descartes-féle intenzitásfüggvényt illetően további részletek találhatók például Walker cikkében [14].

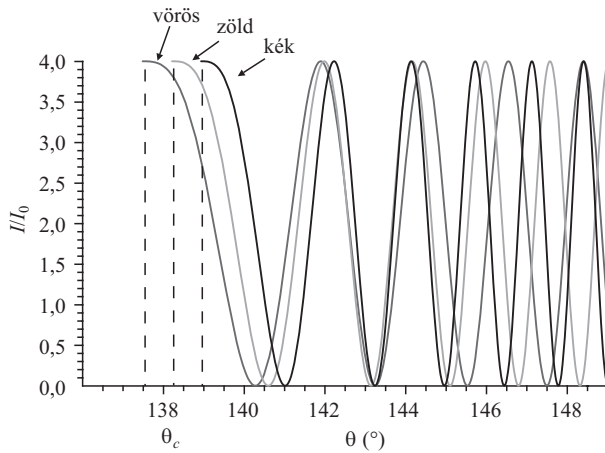
Járulékos szivárvány: Young-elmélet

A bevezetőben említettük, hogy időnként a főtízvárvány belső köríve alatt járulékos szivárványt is megfigyelhetünk. Mivel nagyon ritkán láthatunk hasonló járulékos köríveket mellékszívárványban, csak a főtízvárvánnyal kapcsolatos jelenséget vizsgáljuk. Elsőként Thomas Young, 1804-ben adott magyarázatot a járulékos szivárványra. Sajnos Young elméletéből kapott intenzitás szögfüggése nincs összhangban a megfigyelésekkel. Erről a későbbiekben részletesen szólnunk. Ennek ellenére, a járulékos szivárvány alapvetően csak az interferenciák figyelembevételével magyarázható. Young eredményei, illetve azok fogyatékosága alapvetően befolyásolták a szivárvány jelenségének, és az egész optika kutatási irányvonalát. Ezért ebben a részben röviden vázoljuk Young elméletének lényegét.

Korábban láttuk, hogy adott θ szórási szöghöz két különböző ütközési paraméter tartozik, ha $\theta_c \leq \theta \leq \theta^*$, 6. ábra. Jelöljük ezt a két, θ szögtől függő, ütközési paramétert b_A -val, illetve b_B -vel! Ezek a $b(\theta)$ inverz függvény két ágához tartozó értékek. E két ütközési paraméterrel bejövő párhuzamos fénysugarak a vízcseppből ismét párhuzamosan lépnek ki, hiszen mindkét fénysugárnak a szórási szöge θ . A 9. ábra két ilyen fénysugár menetét mutatja. Az ábrából látható, hogy a két fénysugár egy pontban verődik vissza a vízcsepp felületéről. Valóban, a 3. ábra alapján könnyű belátni, hogy ezen a ponton és a kör középpontján átmenő egyenes a bejövő (vízszintes) fénysugárral $2\beta - \alpha = (\pi - \theta) / 2$ szöveget zár be. Mivel a két fénysugárra a θ szög azonos, a két fénysugár visszaverődése a vízcsepp ugyanazon pontján történik. Kiszámíthatjuk e két fénysugár közötti optikai útkülönbséget is, azaz a b_A és b_B ütközési paraméterektől függő valószínűségi útkülönbségek és a víz-

9. ábra. A két fénysugár az útkülönbség miatt interferál. Az ábra szerinti fénysugarak pályáját a vörös fényre vonatkozó törésmutatóval és $\theta = 146^\circ$ szórási szöggel számoltuk.





10. ábra. Az interferáló fénysugarak intenzitása θ függvényében vörös, zöld és kék színekre (az első maximum hely egybeesik a Descartes-elmélet által megadott irányokkal). Az egyes színek hullámhosszait rendre 650, 520 és 430 nm-nek, míg a vízcsepp sugarát $R = 0,05$ mm-nek vettük. A törésmutatók az 1. ábránál találhatóak. Az intenzitás I_0 egységekben van megadva.

csepp törésmutatójának szorzatát. A 9. ábra alapján egyszerű geometriai megfontolásokkal adott θ szórési szög mellett a d optikai útkülönbségre a következőt kapjuk:

$$d(\theta) = 2R \left(2\sqrt{n^2 - b_A^2(\theta)} - 2\sqrt{n^2 - b_B^2(\theta)} - \sqrt{1 - b_A^2(\theta)} + \sqrt{1 - b_B^2(\theta)} \right), \quad (14)$$

ahol $b_A(\theta)$ és $b_B(\theta)$ a (10) egyenlet pozitív megoldásai adott θ mellett. A fenti kifejezésben az első két tag a vízcseppben, míg az utolsó két tag a levegőben haladó fénysugarak közti optikai útkülönbséget adja. A két fénysugár útkülönbségéből adódó interferenciaképből az intenzitás θ szórési szögtől való függése:

$$\frac{I(\theta)}{2I_0} = 1 + \cos kd(\theta), \quad (15)$$

ahol I_0 a két interferáló fénysugár intenzitása (különb-külön) a vízcseppből való kilépés után, és $k = 2\pi/\lambda$ a levegőben terjedő λ hullámhosszúságú fénynek a hullámszáma. A 10. ábra a különböző színű fénysugarakra (15) képlet alapján számolt intenzitások szórési szögtől való függését mutatja. Az ábrából látható, hogy az első maximum éppen θ_c -nél van. Ez érthető, hiszen ekkor $b_A(\theta_c) = b_B(\theta_c) = b_c$ és így az optikai útkülönbség $d(\theta) = 0$. Az adott színű járulékos ívek a további maximumok irányában keletkeznek. A maximumok helye függ a vízcsepp R sugarának és a fény λ hullámhosszának arányától. Az egyes maximumok annál sűrűbben követik egymást, minél nagyobb az R/λ arány. A szivárványban a vízcseppek átmérője a 0,01 mm-től néhány mm-ig változhat. Az interferenciából adódó járulékos íveket legjobban közvetlenül a főszivárvány belső köríve alatt láthatjuk. Azonban a természetben, az egyébként is igen ritka esetben, egy-két járulékos ívnél többet nem figyelhetünk meg, mert az egyes maximumok intenzitása rohamosan csökken a szórési szög növekedésével. Ez abból következik, hogy a

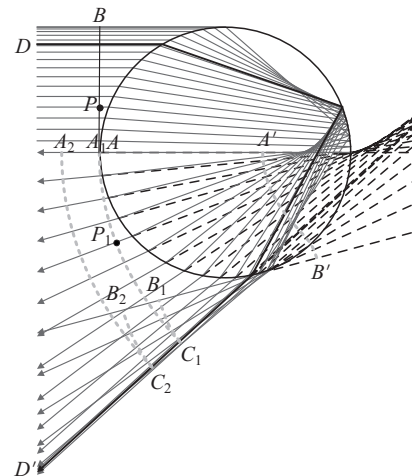
(15) képletben az I_0 intenzitás arányos a szórási hatáskeresztmetszettel, amely a 7. ábra szerint gyorsan csökken a szórési szög növekedésével és zérus az Alexander-féle sötét sávban. Az intenzitásnak ezt a csökkenését azért nem vettük számításba a 10. ábrán, hogy minél szembeötlőbb legyen az ábra mondanivalója. A következő fejezetekben olyan eredményeket mutatunk be, ahol ezt a tényezőt és a polarizációt is figyelembe vesszük.

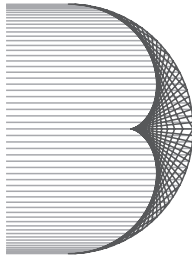
Az interferenciaképből elmosódhat a vízcseppek különböző mérete miatt is. A kisméretű vízcseppekben az egyes színekhez tartozó interferenciaerősítések átlapolódhatnak, a szivárvány egyes járulékos ívei fehérré válnak (ha egyáltalán még elég intenzívek). A 10. ábrán például a második maximum mind a három színre közel azonos. Ezért fehérek és nem színesek a vízfelhők a szivárványszórásnak megfelelő szögekből nézve is, hiszen bennük igen apró vízcseppek vannak.

Airy-elmélet

Young interferenciaelméletével a szivárvány főbb vonásai – legalábbis kvalitatíven – magyarázhatók. Azonban a szórt fényintenzitás – a vízcsepp méretétől és a szórési szögtől való függés – pontos matematikai elmélete még hiányzott. Young elmélete szerint az Alexander-féle sötét sávban az intenzitás zérus. Ugyanakkor a hullámelmélet szerint ilyen hirtelen változás nem léphet fel az intenzitás szögfüggésében, hiszen az elhajlás miatt a geometriai optika szerint sötét tartományba, más néven árnyéktérbe is szóródik fény. Az intenzitás az árnyéktér és a megvilágított tartomány között folytonosan változik. Az elhajlás ezen jelenségének pontos (kvantitatív) leírása meglehetősen nehéz feladat. Jelentős előrelépés 1838-ban Airynek köszönhető, akinek sikerült pontosabb matematikai leírást adni a szivárványról és megalapozni az elhajlás elméletét is. A következőkben először az Airy-elmélet [20] alappontját, majd annak matematikai részleteit ismertetjük.

11. ábra. A kezdeti AB egyenes alakú hullámfront két különböző időpillanatra kiszámított alakja: a görbült $A_1C_1B_1$ és $A_2C_2B_2$ hullámfrontok (az A_1 pont egybeesik az A ponttal). Az $A'B'$ hullámfront egy látszólagos front, a szaggatott vonalakkal jelölt sugarak hullámfrontja. Az $A_1C_1B_1$ hullámfront P_1 pontja az AB hullámfront egy tetszőleges P pontjának felel meg. A D és D' pontokon átmenő vastag vonal a Cartesius-sugármenetet jelöli.

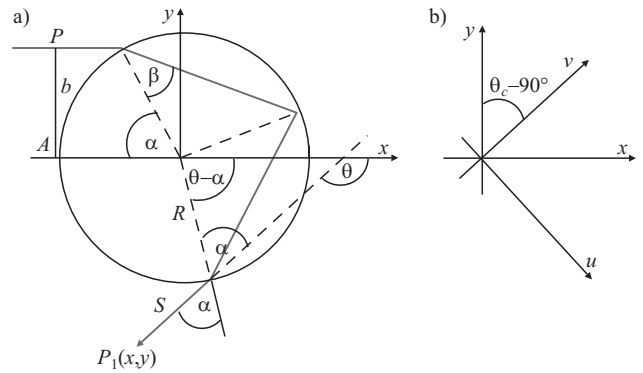




12. ábra. Homorú tükörről visszaverődő fénysugarak burkolója kausztikát eredményez.

A vízcsepre különböző beesési szöggel érkező koherensnek feltételezett „fénysugarak” azonos idő után különböző utat tesznek meg. Ezért a 11. ábrán látható, a bejövő fénysugarakra merőleges AB egyenes alakú (az ábrán a bejövő síkhullám frontjának egy metszete látható) hullámfront a vízcseppből kilépve nem lesz egyenes. Kiszámítottuk, hogy miként torzul az egyenes hullámfront a vízcseppben való áthaladás után. Az ábrán a hullámfront $A_1C_1B_1$ és $A_2C_2B_2$ alakja látható két különböző időpillanatban. Az első esetben az eredeti hullámfront A pontján átmenő fénysugár a belső visszaverődés után éppen visszatér az A pontba (ez az A_1 pont), míg a második eset egy későbbi időpillanatnak felel meg. Látható, hogy a két hullámfront a C_1 , illetve a C_2 pontokban „megtörik”. Ennek jelentőségére az alábbiakban még visszatérünk. Ha a kimenő fénysugarakat visszafelé meghosszabbítjuk (az ábrán a szaggatott vonalak), akkor úgy is elképzelhetjük, mintha a kilépés után kialakult hullámfront az $A'B'$ hullámfrontból fejlődött volna ki. Ezt a hullámfrontot is az előzőekhez hasonlóan számoltuk ki, csak az $A_1C_1B_1$ hullámfront kialakulásának megfelelő időpontnál korábbi időpillanatot vettünk. A hullámfront minden elemi szakasza továbbra is merőleges lesz az adott elemi szakaszon átmenő fénysugárra.

Richard Potter, Airy cambridge-i munkatársa vette észre 1835-ben, hogy az azonos irányból érkező és a vízcseppen áthaladó különböző fénysugarak kausztikát eredményeznek. A kausztika a sugármenetek burkolója, ahol a fény intenzitása mindig nagy. Az egyik legismertebb kausztika a jól megfigyelhető fényes, „csúcsos” alakú görbe, amely egy pohár alján látható, amikor a felülről beeső fény a pohár belső, tükröző faláról visszaverődik. A 12. ábrán megszerkesztettük a gömbtükörre párhuzamosan beeső fénysugarak útját a visszaverődés után. Ezeknek a fénysugaraknak a burkolója eredményezi a kausztikát. Potter megmutatta, hogy szivárványnál a Cartesius-sugármenet is egy kausztikának tekinthető. Esetünkben kétfajta kausztika létezik: egy valós kausztika és egy látszólagos (virtuális) kausztika. Ha például az A_1C_1 hullámfronton merőlegesen áthaladó fénysugarakat visszafelé meghosszabbítjuk, akkor azok burkolója a látszólagos kausztikát eredményezi. Ugyanakkor a C_1B_1 hullámfronton merőlegesen áthaladó fénysugarak burkolója a Cartesius-sugármenet, ami a valós kausztikának felel meg. A kausztikának, a szivárványhoz hasonlóan, van egy világos, illetve egy sötét tartománya, és köztük az intenzitás folytonosan változik. Így egy szivárványban a szórt fény intenzitásának kiszámítása hasonló (de nem teljesen azonos) feladat, mint a kausztikára meghatározni az intenzitás eloszlását. A kausztikára vonatkozó számítá-



13. ábra. a) A bejövő hullámfront egy kiszemelt P pontján átmenő fénysugár az $A_1C_1B_1$ hullámfront P_1 pontjába jut el, amely legyen s távolságra a vízcsepptől. b) Az x és y koordinátatengelyeknek az óramutató járásával megegyező irányban $\theta_c - 90^\circ$ szöggel történő elforgatásával nyert új (u, v) koordináta-rendszer.

sok matematikai részletei megtalálhatók például a Landau-sorozat II. kötetében a 198. oldalon [21].

Térjünk vissza a szivárvány problémájához! Airy a hullámterjedés leírásához a 17. században a Christian Huygens-féle (később Fresnel által tökéletesített) elvet alkalmazta. A Huygens-Fresnel-féle elv szerint a hullámfront minden pontjában a hullám amplitúdója egy korábbi hullámfront összes pontjából jövő elemi gömbhullámok szuperpozíciója. Ebből következik, hogy ha ismerjük az amplitúdót egy hullámfront minden pontjában, akkor meg tudjuk határozni a tér bármely pontjában az amplitúdót. Airy kezdeti hullámfrontnak az $A'B'$ hullámfront közelítő alakját használta. Sajnos az amplitúdó eloszlását nem ismerjük ezen a hullámfronton, csak feltevésrel élhetünk, remélve, hogy az eredmény a valóságos helyzet jó közelítése. A legegyszerűbb feltevés, hogy az amplitúdó a hullámfront minden pontjában azonos, ami egyébként a szokásos feltevés a fényelhajlás elméletében is. Továbbiakban ismertetjük Airy gondolatmenetének matematikai részleteit, követve a Humphreys könyvében [22] található, a mai matematikai fizika nyelvezetére és lehetőségeire általunk adaptált levezetést.

A hullámterjedés matematikai tárgyalása szempontjából az $A'B'$ és az $A_1C_1B_1$ hullámfront egyenértékű. Így elegendő az utóbbi hullámfront alakját meghatározni. Tekintsük 11. ábrán látható AB hullámfront egy tetszőleges P pontján áthaladó sugármenetet, és jelöljük ennek végpontját az $A_1C_1B_1$ hullámfronton P_1 -vel! Ez a sugármenet a 13.a ábrán külön is látható (a koordináta-rendszer x tengelye egybeesik a fény beesésének irányával). Az AB hullámfront A , illetve P pontjából induló fénysugarak azonos idő alatt jutnak az $A_1C_1B_1$ hullámfront A_1 , illetve P_1 pontjába (az A_1 pont egybeesik az A ponttal). Legyen ez utóbbi pont s távolságra a vízcsepptől! A számítást az általános esetben, p -ed rendű szivárványra (azaz, ha p számú húr van a vízcseppben) végezzük el. Ekkor 13.a ábra alapján az azonos idők feltétele a következő egyenletre vezet:

$$R(1 - \cos \alpha) + 2npR \cos \beta + s = 4nR,$$

ahonnan a vízcsepp és a P_1 pont közti s távolság kifejezhető:

$$s = R[2np(1 - \cos \beta) - (1 - \cos \alpha)]. \quad (16)$$

A P_1 pont koordinátái s ismeretében felírhatók:

$$x = R \cos(\theta - \alpha) + s \cos \theta, \quad (17)$$

$$y = -R \sin(\theta - \alpha) - s \sin \theta, \quad (18)$$

ahol a θ szórási szöget a (3) egyenlet adja meg.

Később látni fogjuk, hogy az Airy-elmélet csak a Cartesius-sugármenethez közeli irányokban ad jó közelítést a szórt fény amplitúdójára. Így feltesszük, hogy a vízcseppbe belépő fénysugár beesési szöge $\alpha = \alpha_c + \varepsilon$, ahol $|\varepsilon| \ll 1$, és α_c a (7) képlettel adott Cartesius-sugár beesési szöge.

A levezetés döntő lépése, hogy a hullámfront kiszámításához a P_1 pont (17) és (18) egyenletekkel adott (x, y) koordinátáit ε -ban *harmadrendig* fejtsük sorba. A számításoknál figyelembe kell venni, hogy β , θ és s is függ az α szögön keresztül ε -tól, és így könnyen belátható, hogy a feladat meglehetősen bonyolult. A Humphreys könyvében [22] közölt levezetés is több oldalas. Szerencsére a mai, a matematikai szimbólumokat is kezelő programokkal, mint például a *Mathematica* vagy a *Maple*, ez a feladat könnyen megoldható. Az $A'B'$ hullámfront alakjának meghatározásához célszerű elforgatni a 13.b ábra x és y koordinátatengelyeit az óramutató járásával megegyező irányban $\theta_c - 90^\circ$ szöggel. Az így kapott tengelyeket jelöljük u -val és v -vel, ahogy ez a 13.b ábrán látható! Mivel $\varepsilon \ll 1$, belátható, hogy a v tengely nagyon jó közelítéssel megegyezik a 11. ábrán azzal a szaggatott vonallal, amelynek meghosszabbítása átmegy a D' ponton. Ebben a koordináta-rendszerben a P_1 pont (u, v) koordinátáira ε -ban harmadrendig számolva a következőt kapjuk:

$$u = u_0 + \varepsilon R \cos \alpha_c, \quad (19)$$

$$v = v_0 - \varepsilon^3 R \frac{p^2 - 1}{3p^2} \sin \alpha_c, \quad (20)$$

ahol

$$u_0 = R \sin \alpha_c$$

és

$$v_0 = 2R \left[(p^2 - 1) \cos \alpha_c + \frac{1}{2} - np \right].$$

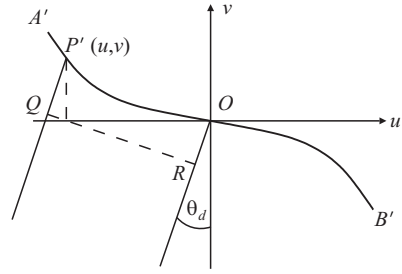
Kiküszöbölve ε -t, és felhasználva (7)-t:

$$v - v_0 = -\frac{b}{3R^2} (u - u_0)^3, \quad (21)$$

ahol

$$b = \frac{(p^2 - 1)^2}{p^2 (n^2 - 1)} \sqrt{\frac{p^2 - n^2}{n^2 - 1}}. \quad (22)$$

Ez a hullámfront keresett, közelítő alakja. A $v(u)$ függvény *harmadfokú polinom*. A (22) képlet szerint $n = 1,33$ nagyságú törésmutatóval számolva, $p = 2$ esetben $b = 4,98$ adódik. Ha s értékét – lásd a (16) egyenletet – úgy választjuk meg, hogy a harmadfokú polinom inflexiós pontja egybeessen az $A'B'$ látszólagos hullámfront inflexiós pontjával, akkor ε -ban harmadrendig csak u_0 és v_0 értéke fog változni a (21) képletben.



14. ábra. A hullámfront és a megfigyelő közti $d(\theta)$ útkülönbség: $\overline{OR} - \overline{P'Q}$. A v tengely θ_c irányba mutat, és a megfigyelő $\theta = \theta_d + \theta_c$ szögben nézi a szórt fényt.

Most kiszámítjuk a $A'B'$ hullámfrontból a megfigyelőhöz érkező fényhullámok szuperpozícióját. A távoli megfigyelőhöz lényegében párhuzamos fénynyaláb érkezik, és ilyenkor a Fraunhofer-féle elhajlási képletet használhatjuk [21]. A számításához vegyük a koordináta-rendszer O középpontját az $A'B'$ inflexiós pontjában, ahogy ez a 14. ábrán látható. Az $A'B'$ hullámfront P' pontja az AB hullámfront egy tetszőleges P pontjának felel meg. A hullámfronttól érkező k hullámszámú síkhullám elhajlása következtében a vízcsepptől r távolságra lévő megfigyelő helyén a hullám amplitúdója:

$$A(\theta) = \frac{1}{r} \int e^{i k d(\theta)} du, \quad (23)$$

ahol $d(\theta)$ a θ irányból érkező fénysugarak útkülönbsége. Itt használtuk fel Airy hipotézisét, mely szerint az $A'B'$ hullámfront minden pontjában azonos a hullám amplitúdója (a képletben egységnyinek vettük). Ellenkező esetben a fenti integrálban megjelenne az amplitúdó ismeretlen eloszlásfüggvénye is, ami lehetetlenné tenné az integrál kiszámítását.

A 14. ábra alapján meghatározhatjuk a $d(\theta)$ útkülönbséget:

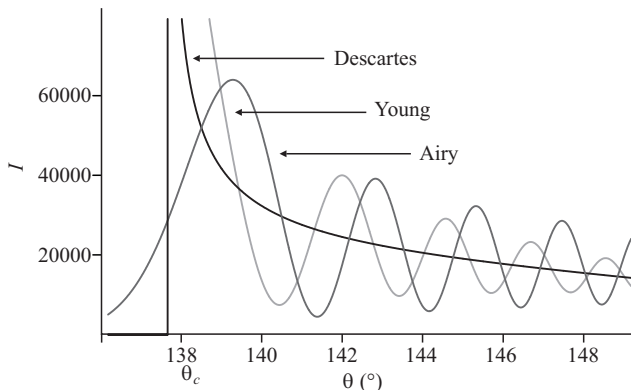
$$\begin{aligned} d(\theta) &= \overline{OR} - \overline{P'Q} = -u \sin \theta_d - v \cos \theta_d \\ &= \frac{b u^3}{3 R^2} \cos \theta_d - u \sin \theta_d, \end{aligned} \quad (24)$$

ahol $\theta_d = \theta - \theta_c$.

Azonban még nem ismerjük az integrálási tartomány határait. Az integrál értékéhez jelentősebb járulékot csak abban az esetben kapunk, ha $d(\theta)$ nem tér el lényegesen a fény hullámhosszától. Legyen a hullámfront u koordinátájú pontjához közeli, két egymástól δu távolságra lévő pontjából érkező fénysugárnak a megfigyelőtől mért útkülönbsége $d(\theta) = \lambda/2$. Ekkor ezek a fénysugarak a megfigyelőnél kioltják egymást, és a (24) képlet alapján

$$\delta u \approx \frac{\lambda R^2}{2 b u^2}.$$

Azt látjuk, hogy u növekedésével a hullámfrontnak az a δu -nak megfelelő része, ami az interferenciában már kioltást eredményez, u^2 -tel arányosan csökken. Például $R = 1$ mm-t, $\lambda = 500$ nm-t véve még $u = 0,1$ mm-nél is $\delta u = 5 \mu\text{m}$



15. ábra. A Descartes-, a Young- és az Airy-elmélet összehasonlítása főszivárvány esetén. A számítás polarizálatlan, vörös színű fényre ($\lambda = 650$ nm, $n = 1,33$) és $R = 0,05$ mm-es cseppugárra vonatkozik ($kR = 483,3$), a polarizációs tényezőt is figyelembe véve. A Descartes-elmélet szerint, a (8) képletből $\theta_c = 137,5^\circ$ adódik főszivárványra ($p = 2$). Az I intenzitást $I_0/(kr)^2$ egységekben számoltuk, ahol I_0 a beeső k hullámszámú fény intenzitása, és r a vízcsepp és a megfigyelő közti távolság.

adódik. Így az integrál értékéhez csak az $u = 0$ pont közvetlen környezete ad jelentős járulékot, az $A'B'$ görbe távolabbi részei nem. Ez az érték tehát jó közelítéssel független a görbe A' és B' végpontjának helyzetétől, ezért e pontok helyzetét nem is szükséges ténylegesen kiszámítanunk. Ehelyett az integrálás határait, az integrál értékének lényeges megváltoztatása nélkül, kiterjeszhetjük a $-\infty$ -tól a $+\infty$ -ig.

Behelyettesítve (24)-et a (23) egyenletbe, azt kapjuk, hogy

$$A(\theta) = \frac{2\pi R/r}{[kRb \cos(\theta - \theta_c)]^{1/3}} Ai(z), \quad (25)$$

ahol $Ai(z)$ az Airy-függvény (korábban szivárványintegrálnak is nevezték):

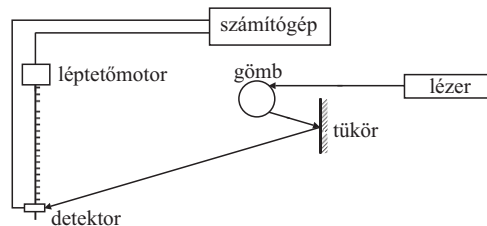
$$Ai(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(\frac{t^3}{3} + zt\right) dt, \quad (26)$$

és

$$z = -\frac{kR \sin(\theta - \theta_c)}{[kRb \cos(\theta - \theta_c)]^{1/3}}. \quad (27)$$

A megfigyelőnél mérhető fény intenzitása arányos $|A(\theta)|^2$ -tel (eltekintve a jelen esettől, általában az amplitúdó komplex mennyiség). Mint látjuk az Airy-elméletből kapott intenzitás a kR dimenziótlan paraméteren keresztül függ a vízcsepp méretétől.

Az Airy-függvény tulajdonságaiból két fontos megállapítást tehetünk azonnal (lásd pl. [21, 23]; a két könyvben a definíció kicsit eltér, mi az utóbbit használjuk). Egyrészt a függvény – ellentétben a Descartes- és a Young-elmélettel – sehol sem szinguláris, még $\theta = \theta_c$ -nél sem ($Ai(0) \approx 0,355$). Másrészt a függvény $\theta > \theta_c$ esetén (azaz, ha $z < 0$) oszcillál, a csúcsok a járulékos szivárvány szögeinél vannak, míg $\theta < \theta_c$ -re (azaz az Alexander-féle sötét sávban) fokozatosan csökken θ csökkenésével.



16. ábra. A mérés elrendezése

Az Airy-elmélet nem tartalmazza a polarizációs effektust. Talán hihetetlen, de ezt csak 1979-ben Können és de Boer építették be először az elméletbe [24].

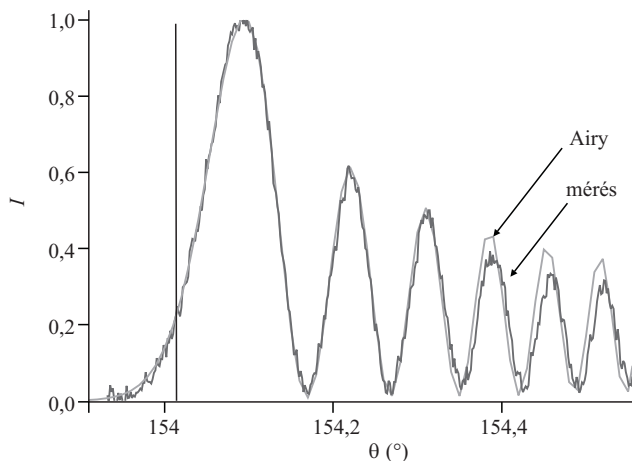
Az eddig ismertett három elmélet által jóslott intenzitás szórási szögtől való függése látható a 15. ábrán. A számításokat Philip Laven programjával végeztük (a program ingyenesen letölthető az internetről [25]). A csak szögtől függő intenzitás vizsgálatához, az irodalomban szokásos módon, célszerű az intenzitást $I_0/(kr)^2$ egységekben mérni, ahol I_0 a vízcseppre érkező k hullámszámú fénynyaláb intenzitása, és r a vízcsepp és a megfigyelő közti távolság. Az ábrából jól látható, hogy az Airy-elméletből kapott első csúcs θ_1 helye kissé nagyobb a Descartes-elméletből számolt θ_c -nél. Törésmutatónak $n = 1,33$ -ot véve, az első csúcsonak a hullámhossztól és a vízcsepp sugarától való függésére a következőt kapjuk:

$$\theta_1 - \theta_c = 0,51 \left(\frac{\lambda}{R}\right)^{2/3},$$

ami a 15. ábra adataival $1,7^\circ$ eltérést jelent. Innen látható, hogy a fény hullámhosszához képest jóval nagyobb méretű vízcseppek esetén a Descartes- és az Airy-elmélet által jóslott szórási szögek jó közelítéssel megegyeznek. A vízcsepp méretének csökkenésével az eltérés nő. A többi csúcs helyének R -függése is ugyanilyen. Ezzel függ össze az a tény, hogy a járulékos íveket mindig a főszivárvány ívének legmagasabb pontján figyelhetjük meg, ahol a vízcsepp mérete még viszonylag kicsi. Miközben a vízcsepp esik lefelé, mérete fokozatosan nő, és a csúcsok egyre sűrűbbek az intenzitásgörbében. Ugyanakkor, túlságosan kis méretű vízcseppek esetén ($R \leq 0,05$ mm) a különböző színekhez tartozó csúcsok átlapolódnak, a járulékos ívek fehérré válnak. A 15. ábrából az is szembevetődő, hogy a Young-elméletből kapott járulékos szivárvány szögei eltérnek az Airy-elméletből kapott értékektől. További érdekes részletek és mérési eredmények találhatóak Walker cikkében [14].

Az Eötvös Loránd Tudományegyetem, Szilárdtestfizika Tanszék kísérleti laboratóriumában Hubn Andrásné végzett méréseket üveggömbön lézernyújtással segítségével. A mérés elrendezése a 16. ábrán látható. Az üveggömből szórt fény intenzitását a tükörtől nagy távolságban egy fényelem méri, amelyet vízszintes irányban egy léptetőmotor mozgat finom lépésközzel. A 12 mW-os lézerciód hullámhossza 650 nm. A számítógép vezérli a motort és gyűjti a detektor jeleit. Az Airy-elmélet és a mérési eredmény összehasonlítása a 17. ábrán látható.

Összegezve, megállapíthatjuk, hogy az Airy-elméletből kapott intenzitás szórásszögfüggésében már nincs szinguláris viselkedés, és a járulékos ívek szögei is egyeznek a



17. ábra. Az Airy-elmélet és a mérési eredmény összehasonlítása főszivárvány ($p = 2$) esetén. A számítás és a mérés polarizálatlan, vörös színű fényre ($\lambda = 650$ nm, $n = 1,467$) és $R = 5,25$ mm-re vonatkozik ($kR = 50749$). A függőleges vonal a (8) képletből számolt $\theta_c(p=2) = 154,04^\circ$ szórési szögnek felel meg. A mért és a számolt intenzitást az első csúcs intenzitásának egységében adtuk meg.

tapasztalattal. Később összehasonlítjuk az Airy-elméletet a következő fejezetben ismertetett, egzaktabb eredményekkel. Látni fogjuk, hogy az Airy-elmélet kvantitatíven is elég pontosan írja le a szórt fény intenzitásának szögfüggését. Jelentősebb eltérések csak kisméretű vízcseppek esetén ($R \leq 0,1$ mm), θ_c -nél jóval nagyobb szögértékeknél, illetve magasabb rendű szivárványok esetében adódnak. A másik hiányossága az Airy-elméletnek, hogy a kezdeti hullámfront mentén az amplitúdóeloszlást egyenletesnek veszi. Ezt a problémát csak a Maxwell-egyenletek megoldá-

sával kezelhetjük. A következő fejezetben vázoljuk azt az egzakt elméletet, amelyet a Maxwell-egyenletek alapján kapunk a szivárványra, mint szórási jelenségre.

A fejezet befejezésekként talán egyetérthetünk a következő gondolattal: csak csodálni lehet Airy tudományos előrelátását, hogy a sorfejtést harmadrendig végezte el, hiszen a fizikában leggyakrabban elegendő első rendig számolni. Munkájának értékét az is növeli, hogy a végső eredményében szereplő integrált nyilvánvalóan számítógép nélkül kellett kiszámítani.

Irodalom

- L.D. LANDAU, E.M. LIFSHIC: *Elméleti Fizika VIII (Folytonos közegek elektrodinamikája)* – Tankönyvkiadó, Budapest, 1986.
- J.D. JACKSON: *Klasszikus elektrodinamika* – TypoTeX, Budapest, 2004.
- A. BARTA, G. HORVÁTH, B. BERNÁTH, V.B. MEYER-ROCHOW: *Imaging polarimetry of the rainbow* – Applied Optics 42 (2003) 399–405
- G. HORVÁTH, D. VARJÚ: *Polarized Light in Animal Vision – Polarization Patterns in Nature* – Springer-Verlag, Heidelberg–Berlin–New York, 2003, p. 447.
- G.B. AIRY: *On the intensity of light in the neighbourhood of a caustic* – Transactions of the Cambridge Philosophical Society 6 (1838) 379–403
- L.D. LANDAU, E.M. LIFSHIC: *Elméleti Fizika II (Klasszikus erőterek)* – Tankönyvkiadó, Budapest, 1976.
- W.J. HUMPHREYS: *Physics of the Air* – McGraw–Hill Book Company, Inc., New York–London 1940, pp. 476–500, Chapter III.
- M. ABRAMOWITZ, I.A. STEGUN: *Handbook of Mathematical Functions* – Dover, New York, 1972.
- G.P. KÖNNEN, J.H. DE BOER: *Polarized rainbow* – Applied Optics 18 (1979) 1961–1965
- A szivárványról és más kapcsolódó témáról sok képpel illusztrált összefoglaló, és a többféle közelítő, illetve egzakt megoldásra kidolgozott, ingyenesen letölthető program található a <http://www.philiplaven.com/mieplot.htm> internetcímen.

MEGEMLÉKEZÉSEK

CSIKAI GYULA 75 ÉVES

Az Európai Fizikai Társulat 2005. május 16–20-ig Debrecenben tartotta XX. magfizikai szakkonferenciáját *Magfizika az Asztrofizikában II.* címmel. A konferencia nemzetközi tanácsadó testületében felmerült, hogy a *Fizika Világévét* e konferencián is meg kellene ünnepelnünk. Örömmel fogadták javaslatunkat, hogy ünnepelés céljából tegyünk egy történelmi visszatekintést: kérjük fel Csikai Gyula professzort, tartson előadást a béta-bomlásbeli neutrínó-visszalkódást demonstráló ötven évvel ez-



előtti kísérletéről. Az ünnepi ülésre beözönlött a konferencia résztvevőin kívül az ATOMKI apraja-nagyja is. Én elnököltem, és az előadást a következő szavakkal vezetem be:

„A következő előadással konferenciánk a Fizika Világévét ünnepli. Ez az előadás arról a kísérletről szól, amelyre az ATOMKI-ban úgy emlékezünk, mint az intézetben valaha is véghezvitt legjelentősebb tudományos tette. E munkán ketten dolgoztak: Szalay Sándor professzor, intézetünk alapítója volt a rangidős, és Csikai Gyula volt a »junior« kuta-

tató, aki ma Csikai professzor, s aki ugyan ma már nem mondható »junior«-nak, de kétségtelenül továbbra is fiatalos. Nagy örömről van köztünk, és előadást tart nekünk. Csikai Gyula több mint egy évtizedig itt dolgozott

Csikai Gyula 75. születésnapja alkalmából tanítványai és munkatársai szakmai cikkekkal tisztelegnek az ünnepelt előtt. Ezen értékes írásokból, a *Fizikai Szemle* jelenlegi számában adjuk közre a lehető legtöbbet. *Király Beáta* és *Raics Péter* cikkét később – utalva az alkalomra – közöljük.