Makkai Mihály

Az absztrakt halmazok elmélete függő típusos elsőrendű logikára alapozva*

I. Bevezetés

A jelen tanulmány célja, hogy eloszlasson bizonyos alapvető félreértéseket és tévképzeteket, amelyekkel számos alkalommal találkoztam a megalapozásról folyó vitákban, mind kategóriaelméleti, mind hagyományos logikai kontextusban. A tévképzetek közül a legrosszabb az, hogy a kategóriaelmélet és a logika inkompatibilis, választani kell közöttük ahhoz, hogy *koherensek* maradjunk. (Sajnos ha lecseréljük a „koherens" kifejezést arra, hogy „a közösség számára elfogadható", akkor jóval nehezebb a dolgom.) A *Matematika Típuselméleti Kategoriális Megalapozása* címet viselő program (*Type-Theoretic Categorical Foundation of Mathematics;* TTCFM) első szintjének informális tárgyalásával igyekszem megértetni, hogy a toposzelmélet az első jelentős lépés egy globálisabb, egyelőre félkész megalapozási rendszer felé, amelyben a kategóriaelmélet és a logika békében megfér egymással.

Azzal kell kezdenem, hogy vitába szállok Solomon Feferman nézeteivel a matematika kategoriális megalapozásáról – erre általánosságban CFM-ként hivatkozunk. Következzen egy részlet Fefermantól (Feferman1977, 154), amelyet Jean-Pierre Marquis tanulmánya nyitóidézetéül választott (Marquis 2012). (Az idézet tagolása, a számozás és a kiemelések tőlem származnak.)

A félreértések elkerülésére hadd ismételjem meg, hogy nem a matematika jelenlegi halmazelméleti megalapozása mellett érvelek. Hanem amellett, hogy a matematika platonista felfogása szerint

> (1) bármely kategoriális megalapozást meg kell előznie valami olyasminek, mint a halmazelmélet jelenlegi rendszerei.
> Általánosabban:
> (2) *az absztrakt matematika bármely felfogása mellett a művelet és a kollekció fogalmát elsőbbség illeti meg.*

* A szerző Máté András meghívására 2013 márciusában tartott egy – erősen technikai – előadás-sorozatot az Eötvös Loránd Tudományegyetem Logika Tanszékén. E tanulmányt a Máté tanár úr és az előadások közönsége által a tárgy iránt tanúsított élénk és beható érdeklődés inspirálta. A tanulmányt Máté Andrásnak ajánlom 60. születésnapja alkalmából.

A válaszom röviden annyi, hogy a (2) résszel egyetértek, de (1)-gyel nem. A „kollekció” és a „művelet” természetesen alapvetőek; így (2)-vel nem is vitatkoznék. (1)-gyel viszont nem tudok egyetérteni. Az a sugallt következtetés, hogy az absztrakt matematika bármely szisztematikus felfogását, amelyben elsőbbséget élvez a kollekció és a művelet fogalma, *szükségképpen* „meg kell előznie valami olyasminek, mint a halmazelmélet jelenlegi rendszerei”, nincs érvekkel alátámasztva, és szerintem nem is helyes. Még ha Feferman úgy találja is, hogy megítélése szerint az irodalomban eddig felvetett különféle kategóriaelméleti megalapozási rendszerek alapjául valami olyasmi szolgál, „mint a halmazelmélet jelenlegi rendszerei” vagy annak változatai, ebből nem következtethet – és valójában egyetlen érvet sem hozott fel, ami alapján következtethetne – arra, hogy egy újonnan felvetett megalapozási rendszer, még ha „kategóriaelméletiként” hirdeti és ezzel gyanúba keveri is magát, *metafizikai értelemben* valami olyasmitől fog függeni, mint „a halmazelmélet jelenlegi rendszerei”. Ha „valami olyasminek, mint a halmazelmélet jelenlegi rendszerei” helyett „naiv halmazelmélet” szerepelt volna az idézetben, akkor nem lenne semmi kifogásom. Más szóval: az a kifogásom, hogy Feferman a naiv halmazelméletet, amely olykor egymásnak ellentmondó, de mégis igen termékeny gondolatok egy lényegéből adódóan *nem-rendszerezett* komplexuma, azonosítja a létező formalizált halmazelméletek kodifikált *rendszereivel*.

Még egy bekezdés e tanulmány és a TTCFM általános kontextusáról. A TTCFM-projekt leírásában a „megalapozási” jelző félrevezető. Úgy tekintem, hogy a matematikát a szokásos értelemben „jól megalapozta” mindaz, ami az elmúlt két évszázadban történt a matematika szigorításában, a matematikai logikában, a halmazelméletben és a kategóriaelméletben, és nem áll szándékomban az így kialakult matematika szűkebb értelemben vett *megalapozását* tökéletesíteni. (Lehet, hogy másképp beszélnék, ha ösztöndíjra pályáznék; de szerencsére kiöregedtem az ösztöndíjpályázatokból.) Az absztrakt fogalmak világa érdekel: a kollekciók, a műveletek, az azonosság, a számok, a logika, a bizonyítások, a formális nyelvek, mindaz, amire akkor gondolunk, amikor a *naiv halmazelméletet* említjük; ami megint csak félrevezető elnevezés, hiszen valamiért a „halmazra” helyeződik benne minden hangsúly. Az a helyzet, hogy ez a „naiv halmazelmélet” – jobb lenne a „naiv fogalomelmélet” – *matematikai* elmélet, ha a módszerei alapján ítéljük meg; de ha közelebbről szemügyre vesszük, a matematika az, ami a (naiv) fogalomelmélet módszereit *használja*, a matematika fogalomelméleti, nem pedig fordítva. Úgy vélem, hogy ami Fregével és azután történt a naiv fogalomelméletben – az ő egészében véve sikeres (!) kísérlete, hogy megszabadítsa a „naiv” jelzőtől –, az minden tudományos vállalkozás között a leglenyűgözőbbé teszi ezt a tárgyat. Minél többet tudunk meg benne és róla, annál rejtélyesebbé válik – „rejtélyessé” abban az értelemben, ahogy a tudomány általában is rejtélyes. Kár, hogy Platón nem láthatja ezeket a fejleményeket. Ő az, aki a leginkább értékelni tudná a fogalomelméletet minden múltbeli, jelenkori és talán jövőbeli ember közül. (Vö. mindezt Lawvere 1969 első fejezetének első három bekezdésével; F. V. Lawvere a fentiekkel rokon, de egyszersmind azoktól eltérő nézeteket fogalmaz meg.)

A tanulmány fő részében azt az – *absztrakt halmaznak* nevezett – halmazfogalmat tárgyalom, amelyre a TTCFM legalsó szintje épül. A TTCFM-nek van végtelen sok más, „magasabb" kollekciótípusa is; olyanok, amelyek *mögött nincsenek* (absztrakt) halmazok. Az utolsó szakaszban nagyon röviden túllépek a halmazokon a kategóriákhoz, n-kategóriákhoz és ω-kategóriákhoz. Az ω-kategóriákhoz egészen más metafizika társul; erről a montreali Oktoberfesten beszéltem 2004-ben, ahol Bertrand Russell *Logikai atomizmus*ából vettem a nyitóidézetemet. Egyszerű szavakkal: itt az absztrakt halmazok atomjai *(urelementjei)* eltűnnek, és átadják a helyüket a létezők végtelen és soha véget nem érő, „egyre atomibb" összetevőkben történő elemzésének.

Futólag hadd említsem meg, hogy a TTCFM tiszta változatában csak kollekciók vannak, ezektől elkülönített műveletek nincsenek.

Az absztrakt halmaz fogalma a naiv halmazelméletből származik, és a 19. században keletkezett, jelesül Georg Cantor munkásságában. A TTCFM magasabb kollekciótípusait részben bevezeti, részben sugallja (a „kategorifikáció" intuitív elgondolásával) a *kategóriaelmélet*, amelyet az 1940-es években dolgozott ki S. Eilenberg és S. Mac Lane. Mára a kategóriaelmélet a matematika elfogadott területe lett, és a TTCFM *metaelmélete* teljes mértékben felhasználja. Mégsem az a helyzet, hogy a TTCFM magasabb típusú kollekciói maguk kategóriák volnának. Valójában a második szinttől kezdve még csak nem is hozzáadott struktúrával rendelkező kategóriák. Például egy *bikategória* (a fogalom J. Benaboutól származik) nem hozzáadott struktúrával rendelkező kategória; nincs is *mögöttes* kategóriája.

A TTCFM legfőbb újdonsága az azonosságelmélete, amely a *FOLDS-azonosság* fogalmán alapul. A FOLDS-azonosság felváltja Gottlob Frege globális azonosságfogalmát (egyenlőségfogalmát), amelyet a (modellelméleti) logikában egyetemesen elfogadnak – és így az axiomatikus halmazelméletben is – az *azonosságjeles elsőrendű logika* részeként a maga tiszta (alkalmazás-előtti) formájában. A FOLDS-azonosság része a tiszta FOLDS-nak is; vagyis a FOLDS-azonosságot a FOLDS minden alkalmazása átveszi a FOLDS általános elméletéből. Az azonosság az absztrakt matematika fogalmi apparátusában alacsonyabbrendű fogalomként eltörpül a „kollekció" és a „művelet" mellett – legalábbis, ahogy Feferman mondja, „valami olyasminek, mint a halmazelmélet jelenlegi rendszerei" a nézőpontjából. Ezért az új azonosságelmélet *megkülönbözteti* a TTCFM-et „halmazelmélet jelenlegi rendszereitől" csakúgy, mint minden más elmélettől is, amelyről tudomásom van.

Fontos leszögezni, hogy a TTCFM *metaelmélete* függ a standard halmazelmélettől. Formalizált változata azonban, lévén explicit és *elemi* – vagyis *elsőrendű* –, önmagában is megáll, bármi „őt megelőző" nélkül. Egyáltalán nem versengünk a standard halmazelmélettel: egy alternatívára teszek javaslatot, nem pedig egy minden mást kizáró megalapozási sémára. A TTCFM rendszere, még félkész formában is, lényeges metaelméleti megfontolások alapjául szolgálhat.

II. AZ ABSZTRAKT HALMAZ FOGALMA LAWVERE-NÁL

F. William Lawvere a (Lawvere 1976) második szakaszában tárgyalja az *absztrakt halmazokat*, és azt, ahogy az (elemi) topósz fogalma lehetővé teszi az absztrakt halmazok elméletének matematikai formalizálását. Így ír: „Az x absztrakt halmaznak olyan elemei vannak, amelyek egyike sem bír bármiféle belső struktúrával"; más szóval: x „urelementek" halmaza a mai halmazelmélet bevett terminológiája szerint. Az urelementeknek korlátozott szerepe volt a halmazelmélet korábbi rendszereiben: jelesül a ZFC egy korai, E. Zermelo-tól származó változatában; az NFU-ban, amely W. V. O. Quine New Foundationsének R. Jensen által kidolgozott változata; és a Kripke–Platek-axiómarendszer J. Barwise-féle változatában. De az urelementek mindezekben a rendszerekben egy *kumulatív* struktúra alján helyezkedtek el, amelyben egy képzeletbeli és többé-kevésbé korlátlanul ismételt *konstrukciót* hajtunk végre (Gottlob Frege komprehenziós elvének formális vagy informális alkalmazásával), amelynek eredménye minden lépésben egy már hozzáférhető entitásokból álló kollekció. Ezeknek az entitásoknak egy része urelement, amelynek egyáltalán nincs eleme, más része már megkonstruált halmaz. Az absztrakt halmazok toposzában, a toposzokat definiáló elsőrendű (!) axiómák „standard modelljében", amit az idézett helyen Lawvere tárgyal, éppúgy, mint az absztrakt halmazok itt előadott elméletében, az *egyetlen kollekciófajta* az „absztrakt halmaz": *minden* halmaz *minden* eleme *urelement*. Másfelől mindkét elméletben van egy primitív *műveletfogalom*, *leképezés* az x halmazról az y halmazra; $f\colon X \to Y$. A toposz olyan *kategória*, amely néhány további elsőrendű axiómát is kielégít. Ezek az axiómák meglepően kompakt axiómarendszert alkotnak, amely igen gazdag következményekben.

A témával most ismerkedő olvasónak érdemes belegondolnia, mennyire meglepő, hogy a matematikát fel lehet építeni kizárólag az absztrakt halmazok és a közöttük értelmezett függvények (leképezések; ezt is primitív fogalomnak tekintjük) szűkös erőforrásaira támaszkodva. Valójában a toposzelmélet megértésének legcélravezetőbb módja, ha komolyan megkíséreljük így felépíteni a matematikát a kezdetektől, anélkül hogy bármilyen előzetes elképzeléssel élnénk a topósz-axiómákkal, vagy akár a kategória-axiómákkal szemben, és úgy jutnánk el ezekhez az axiómákhoz, mint amik szükségszerűek. Nyilvánvaló terjedelmi okokból az absztrakt halmazok itt következő tárgyalása nem tudja érzékeltetni, hogy milyen *erős* ez az elmélet valójában.

Ahelyett, hogy az „absztrakt halmazelmélet" tárgyalásában követném a (tisztán) kategóriaelméleti nyelvet, a következő fejezetben típuselméleti nyelvet fogok használni, amely megmutatja, miképpen szeretném a toposzelméletet kiterjeszteni a TTCFM-re. Bár Lawvere célja az volt, hogy bevezesse és hatékonnyá tegye a tisztán *kategoriális* nyelvet, tanulmánya számos olyan vonatkoztatási pontot tartalmaz, amelyek segítenek az általunk követett *típuselméleti* metafizika kifejtésében.

Lawvere 1976. 119. oldalának utolsó két bekezdésében a következőket olvashatjuk:

> Úgy vélem, levonhatjuk azt a következtetést, hogy
> (1) az elsődlegesként felfogott elemviszonyból következik az elemviszony globális és abszolút volta, míg a gyakorlatban az elemviszony lokális és relatív; (…).
> Ezek a megfontolások elvezetnek ahhoz, hogy bevezessük a (konstans) *absztrakt halmaz* következő „megtisztított" fogalmát – valójában ez az, amit a modern matematika naiv halmazelméleti gyakorlata használ:
> (2) Az *x* absztrakt halmaznak olyan elemei vannak, amelyek egyike sem bír semmiféle belső struktúrával;
> (3) *x*-nek nincs belső struktúrája elempárjainak egyenlőségén és egyenlőtlenségén kívül,
> (4) és a számosságán túl nincs külső tulajdonsága sem;
> (5) egy absztrakt halmaz abban a tekintetben mégis kifinomultabb (kevésbé absztrakt), mint egy számosság, hogy vannak elemei, míg a számosságnak nincsenek. Az utóbbi sajátosság teszi lehetővé, hogy az absztrakt halmazok támogassák azokat a külső relációkat, amelyeket
> (6) *leképezésként* ismerünk, és amelyek a naiv halmazelmélet másik alapvető fogalmát alkotják (a számosságok csak azt a kevésbé kifinomult külső relációt engednék meg, hogy az egyik kisebb a másiknál vagy sem). Így a „leképezés" túl alapvető ahhoz, hogy formálisan definiáljuk, bár annyit megjegyzünk, hogy egy leképezés kielégíti a jól ismert minden-*x*-hez-van-pontosan-egy-*y* feltételt (…). A harmadik fogalom a
> (7) leképezések *kompozíciója* (…).
> A kompozíció természetesen
> (8) *asszociatív*, és minden halmazhoz tartozik egy *identikus leképezés*.

Úgy érzem, e ponton hangot kell adnom a fenntartásaimnak. Lawvere idézett cikkében sokszor hivatkozik „a (matematikai) gyakorlatra"; mindjárt a fenti idézet elején, az (1) sorban is. El kell határolódnom attól, ahogyan Lawvere szembeállítja a kategoriális módszerek és a halmazelméleti módszerek *matematikai gyakorlatban* betöltött szerepét [rögtön az (1) sorban is]. Az a véleményem, hogy az ezekben az állításokban sugallt kép valószerűtlen, amennyiben a kategóriaelméleti módszereket globálisan felsőbbrendűnek mutatja a halmazelméleti módszereknél. Fontos hozzátenni a fentiekhez, hogy Lawvere *fogalomelméleti* nézeteit nem találom kevésbé figyelemre méltónak vagy kevésbé jelentősnek csak azért, mert nem értek vele egyet a *matematikai gyakorlatot* illetően. Az igazság az, hogy a klasszikus matematikai logika után William Lawvere gyakorolta a legnagyobb hatást a gondolkodásomra.

A következőkben néhány lawvere-i fogalom formalizálásával adok egy első illusztrációt a FOLDS-ról, mind „tisztátalan", „szintaktikai cukorral" meghintett formában, mind pedig „tiszta formájában".

El fogok távolodni a lawvere-i kontextustól azzal, hogy explicit módon bevezetem a halmazok *elemeit*. Ezt Lawvere el szeretné kerülni, hiszen a „toposz" általa megcélzott fogalmában a „halmaz" „elemeit" a „halmazba" történő leképezések képviselik. Szeretném megmutatni a FOLDS flexibilitását: nem csak szigorúan kategóriaelméleti kontextusokban működik.

III. AZ ABSZTRAKT HALMAZOK TÍPUSELMÉLETI FELFOGÁSA

A következőképpen értelmezzük az (1) passzust. Az értelmezés eleinte tisztán *grammatikai* lesz: annak leírása, hogy mit tudunk és mit nem tudunk *értelmesen* mondani. Ezután óvatos metafizikai kalandozásba kezdünk.

Abban a felfogásban, amely szerint „az elemviszony globális", egy változóval – mondjuk x-szel – jelölünk egy tetszőleges entitást, egy másikkal – mondjuk a-val – pedig egy halmazt, és értelmesnek tekintjük az „$x \in A$", „x az a-hoz tartozik" kijelentést. Az „$x \in A$" kijelentés igaz vagy hamis lehet aszerint, hogy mi x és mi a. Szintaktikai (grammatikai) értelemben értelmes negálni a kijelentést, és azt írni, hogy $\neg\, x \in A$; és értelmes korlátozás nélkül mondatok szerkesztésére használni ezt a kijelentést a logikai operátorok segítségével.

Másfelől a „lokális és relatív elemviszony" értelmében a, a halmaz, egy adott *változótípusba* tartozik, míg x egy újabb változó, amelyet $\mathrm{El}(A)$ típusúként *deklarálunk*: „a eleme"; szimbólumokkal: „$x{:}\mathrm{El}(A)$". A deklaráció értelmében az x változót csak úgy lehet használni, mint ami az a halmaz elemei felett fut. Tehát a „van olyan x, amelyre »… x…« fennáll" azt fogja jelenteni, hogy A-nak van olyan eleme, amelyre fennáll „…"; a „minden x-re fennáll »…x…«" pedig azt, hogy A minden elemére fennáll „…". Észrevehetjük, hogy x típusa, El(A), *függő* típus: a típus maga *függ* az A változótól – A-t magát pedig Set *konstans* típusúként deklarált változónak tekinthetjük. Észrevehetjük továbbá, hogy az $x{:}\mathrm{El}(A)$ deklaráció már nem kijelentésként funkcionál. Nem tudjuk például negálni; grammatikánk nem engedi, hogy $\neg x{:}\mathrm{El}(A)$-t írjunk. Ez felveti a kérdést, hogy milyen lehetséges használatai vannak az „: $\mathrm{El}(A)$" „állításnak". A válasz: a fentebb elmagyarázott kvantifikációs kifejezésekben használjuk, mint a „$\exists x{:}\mathrm{El}(A)$ …" és a „$\forall$x:El(A) …" – és semmilyen más kontextusban.

Elképzelésünk szerint *metafizikai* értelemben az a absztrakt halmaz x elemei nem léteznek abszolút értelemben, A-tól függetlenül. A „mi az x?", „milyen tulajdonságai vannak x-nek?", „milyen relációkban áll x az y-nal?" kérdéseknek nincs értelme addig, amíg nem deklaráltuk vagy nem tettük fel, hogy x A eleme,

y pedig B eleme valamely „adott” A-ra és B-re, amelyeket már azelőtt tekintetbe vettünk, hogy x-szel és y-nal ezt tettük volna. Az x entitás csak A *elemeként* rendelkezhet valamely tulajdonsággal. Magáról A-ról is csak azután mondhatjuk, hogy rendelkezik bármilyen tulajdonsággal, miután már *deklaráltuk* vagy felismertük vagy feltettük, hogy halmaz. Másfelől ha azt mondjuk, hogy *valami* igaz A összes elemére vagy A némely elemére, akkor ennek a *valaminek* értelmesnek kell lennie A elemeire, de más dolgokra nem feltétlenül.

FOLDS-ban ez a fajta relatív egzisztencia lesz általános. Bizonyos entitások (voltaképpen a többségük) egy vagy több *korábbi* entitástól fognak *függeni* (a fentebbi x egyetlen *korábbi* entitástól, A-tól *függ*). Tulajdonképpen minden entitás *korábbi* entitások egy szervezett rendszerétől, egy *kontextustól* fog függeni (amely „alapesetben” üres is lehet).

Az absztrakt létezőknek ez a metafizikája első látásra különösnek tűnhet, de fel kell ismernünk, hogy ez egy olyan elgondolás, amelyet a modern *absztrakt* matematika (a csoportelmélet, a ponthalmaz-topológia és a „magasabb” matematika sok más területe) lépten-nyomon használ. Ezzel természetesen nem állítjuk, hogy az absztrakt halmazok metafizikája lenne az *egyetlen*, amit a matematika „lépten-nyomon” használ. Amikor azt mondjuk: „legyen G egy feloldható csoport”, úgy képzeljük, hogy G elemei urelementek, és nehézség nélkül megértjük, mit jelent G feloldhatósága; de ha azt mondjuk: „tekintsük a (korábbi) G automorfizmusainak A csoportját”, akkor A elemei már nem urelementek. Fontos pont az absztrakt halmazelmélet megértésében, hogy ez az elmélet tud ilyen entitásokat kezelni, mint ez az A, mindamellett, hogy egy absztrakt halmaznak csak urelementek lehetnek az elemei. E kezelni-tudás ellenére nem állíthatjuk, hogy a matematika gyakorlatában *csak* absztrakt halmazokat *használnánk!*

A matematikai objektumok *típusainak* Bertrand Russelltől származó elgondolását mozgósítottuk. A típuselmélet eredeti eszméje azzal kívánta elkerülni a paradoxonokat, hogy megtiltotta a (szükségképpen) új típusba tartozó újonnan konstruált objektumoknak, hogy „megkérdőjelezhető” *relációkba* lépjenek a régi típusok régi objektumaival; olyan *relációkba*, amelyek eredetileg *csak* a régi típus régi objektumaira voltak definiálva. Ilyen *relációra* maga az *elemviszony* az elsődleges példa. Most pedig az következik, hogy különböző halmazok elemeit még *egyenlőségi* relációba sem hozhatjuk egymással. Persze a russelli kontextusban és annak modern változataiban – mint az egyszerű típuselmélet – a különböző típusba tartozó elemek egyenlősége triviális kérdés, hiszen mondhatjuk azt, hogy *különböző* típusba tartozó elemek szükségszerűen *nem egyenlők*. Más szóval: a globális azonosság ártalmatlan feltevés. Nem így a halmazelméletben – hiszen nincs külön elgondolásunk arról, hogy mit jelent két halmaz esetében *különbözőnek* lenni, szemben az egyszerű típuselmélet nem-változó típusaival.

Ahogy fentebb megállapítottuk, az idézet (2) része azt mondja ki, hogy *minden* absztrakt halmaz *minden* eleme urelement.

A (3) passzus szerint minden egyes *a* halmazhoz adott egy *egyenlőségi* reláció – $=_A$, vagy egyszerűen =, ha *A*-t odaértjük – úgy, hogy *A* bármely *x* és *y* elemére értelmes $x =_A y$-t írni. Ez egy *kijelentés*, amely lehet igaz vagy hamis, és amelyet felhasználhatunk a logikai operátorokkal történő mondatszerkesztés folyamatában. Természetesnek fogjuk találni, hogy *axiómának* tekintsük a $=_A$ reláció reflexivitását, szimmetriáját és tranzitivitását – röviden azt, hogy ekvivalenciareláció. Ez az első alkalom, hogy felírjunk néhány formulát és axiómaként felvett kijelentést a formális elméletünkben, még ha csak előzetes formában is.

Reflexivitás: $\forall A{:}\mathrm{Set} \,.\, \forall \mathrm{x}{:}\mathrm{El}(A) \,.\, x =_A x.$
Szimmetria: $\forall A{:}\mathrm{Set} \,.\, \forall x,y{:}\mathrm{El}(A) \,.\, x =_A y \to y =_A x.$
Tranzitivitás: Az olvasóra bízzuk.

Megragadjuk ezt az alkalmat arra is, hogy szakítsunk „a halmazelmélet meglevő rendszereinek” *mindegyikére* jellemző metafizikával. A „szokványos” halmazelméletben – legyen az ZF, GB, MK, NF vagy bármely hasonló rendszer, amely globális elemviszonyt használ – értelmes és fölöttébb ésszerű is az *a* és *B* halmazok *egyenlőségét* úgy definiálni, hogy $A = B$ akkor és csak akkor, ha $\forall x \,.\, x \in A \leftrightarrow x \in B$. Ez a definíció – vagy ha úgy tetszik, extenzionalitási axióma – nem hozzáférhető az absztrakt halmazelméletben, hiszen a mondat legalább két értelemben agrammatikus. Nincs típusba nem sorolt változó; ezért nem tudjuk leírni azt, hogy „$\forall x$”. Másfelől „$x \in A$”, vagyis hozzáférhető megfelelője, „x:El(A) nem alkalmas mondatképzésre: nem használható úgy, ahogy az extenzionalitás bikondicionálisában tettük. Megpróbálhatjuk ilyesféleképpen korrigálni az állítást:

$$\forall \mathrm{x}{:}\mathrm{El}(A) \,.\, x{:}\mathrm{El}(B) \wedge \forall x{:}\mathrm{El}(B) \,.\, x{:}\mathrm{El}(A).$$

Az utóbbi megfogalmazás csak típusba sorolt változókat használ, de kijelentésként szerepeltet egy olyan változódeklarációt, mint „x: El(B)”, állítva azt; ez pedig nem engedélyezett. Végül megpróbálkozhatunk ezzel:

$$\forall x{:}\mathrm{El}(A) \,.\, \exists y{:}\mathrm{El}(B) \,.\, x = y \wedge \forall y{:}\mathrm{El}(B) \,.\, \exists x{:}\mathrm{El}(A)\; x = y.$$

Ez azért lesz hibás, mert *globális egyenlőséget* használ: különböző típusú változók – *x* és *y* – egyenlőségét állítja. Ez a fogalom nem hozzáférhető az absztrakt halmazelméletben. Éppen az az absztrakt halmazelmélet legjellemzőbb tulajdonsága, hogy nem használja a fregei globális egyenlőséget.

Felteszek egy retorikai kérdést a bírálóknak, akiknek fő képviselője Solomon Feferman: még mindig „a halmazelmélet meglevő rendszereinek” metafizikájában vagyok? A bírálók kétségbe vonhatják, hogy bármi ésszerűhöz tudnék kezdeni azután, hogy így megfosztottam magam az extenzionalitási axiómától, és megállapíthatják, hogy elhagytam a civilizációt a sivatagi lét kedvéért, de azt nem tudják egyszersmind fenntartani, hogy még mindig annak a civilizációnak a szabályai szerint élek.

Fontos észben tartanunk, hogy az absztrakt halmazelméletben a halmazok egyenlősége (azonossága) nem definiálható extenzionalitással. Ez végül ahhoz vezet, hogy teljesen lemondunk a halmazokra vonatkozó azonosságról.

Pár szó általában a FOLDS-ról. A tiszta FOLDS-ban nincsenek relációk, mint a $=_A$ típusos azonosság; a relációkat további függő típusok imitálják. Például élhetünk a

$$A{:}\mathrm{Set}\ .\ x,y{:}\mathrm{El}(A)\ .\ e{:}\mathrm{Equ}(A,x,y)$$

deklarációval. Itt Equ egy új *fajta* (típusfej), amely bevezeti a helyesen formált $\mathrm{Equ}(A,x,y)$ típust, és a fenti változódeklaráció *mellett* „$\exists e\ .\ \top$” annak felel meg, hogy „x egyenlő y-nal”. Az újraformulázásnak van egy intuitív (metafizikai) jelentése: *e tanúsítja* azt a tényt, hogy x egyenlő y-nal.

Később, a FOLDS „cukrozott” változatában közvetlenül fogjuk használni az *alkalmazás* műveletét, amelyet a tiszta FOLDS-ban hasonló módon tudunk kiküszöbölni egy új fajta és a megfelelő új típusok bevezetésével.

A tiszta FOLDS-ban csupán a következők vannak:

(1) „konzisztensen formált” függő típusok;

(2) változók, amelyeket ilyen típusúakként deklarálunk;

(3) kvantorok, amelyek egy deklarált változó felett futnak (lásd fentebb a kvantorok tárgyalását!), és így „a kvantor nem hagy egy változót sem a levegőben lógni” (az „$A{:}\mathrm{Set}\ .\ x{:}\mathrm{El}(A)\ .\ \mathrm{Equ}(A,x,x)$” deklaráció után nem írhatom a „$\forall A\ .\ \exists e\ .\ \top$” kvantifikált mondatot, mert ez levegőben lógva hagyná x-et – a helyes „$\exists e.\ \top$” formulában A és x szabad változó, így a helytelen „$\forall A\ .\ \exists e\ .\ \top$” formulában csak x lenne szabad, ami A-tól függ –; ezzel szemben azt le szabad írni, hogy „$\forall x\ .\ \exists e\ .\ \top$”, mert ebben egyedül az A változó marad szabad, A pedig nem függ x-től); és

(4) a $\top$ és a $\bot$ kijelentéskonstansok, valamint a szokásos kijelentéslogikai konnektívumok; ezek korlátozás nélkül használhatók.

Ennyi remélhetőleg elég lesz ahhoz, hogy kapjunk egy első képet a tiszta FOLDS – egyszerű! – szintaxisáról. És, ismétlem, a tiszta FOLDS is elég, vagyis eléggé tehető, esetleg a nyelv *szignatúrájának* bővítése árán. A FOLDS-beli megfogalmazások esetleges bonyolultsága a használt *szignatúrák* bonyolultságából ered: azokból a szabályokból, amelyek megadják, hogyan lehet konzisztens (grammatikailag helyes) módon függő típusokat bevezetni a már deklarált változókkal.

Visszatérve a naiv halmazelmélet nézőpontjára: láthatjuk, hogy a FOLDS számos „halmazt”, kollekciót használ, puszta kollekciókat is, még ha (olykor igencsak) korlátozottan is. Példa erre azon e entitások kollekciója, amelyek tanúsítják az „$x =_A y$” állítást; egy olyan kollekció, amely az A, az x és az y entitásoktól *függ.* Ezt és a többi hasonlót nem nevezzük azonban „halmaznak”. A „halmaz” szót a Set típusú entitásokra tartjuk fenn. A FOLDS metafizikája számos különböző fajtába tartozó kollekció és entitás relatív, korlátozott elfogadását jelenti, ahol minden egyes entitást csak egy sajátos függőség deklarálásával fogadunk el, és csak behatárolt helyzetekben használhatjuk őket grammatikailag helyesen. Ez igen éles kontrasztban áll a halmazelmélettel (osztályelmélettel), ha úgy tekintjük, ahogy Gottlob Frege formalizálta; ez az első formalizálás, és máig teljesen releváns – az összes többi, a jelen változattal együtt, a paradoxonok kiküszöbölésére tett kísérlet eredménye! Persze ez a jellegzetesség önmagában nem a FOLDS újdonsága; először a hagyományos típuselméletben tűnik fel. A FOLDS-ban a korábbi elméletekhez képest megtöbbszöröztük a kollekciókat; de (továbbra is) szigorú ellenőrzést gyakorlunk a használatuk felett.

Minden nyilvánvalósága ellenére is fontos hangsúlyozni azt a tényt, hogy a FOLDS szemantikája, pontosabban a kvantorok kiolvasása, amit a fentebbi megjegyzések a naiv halmazelmélet részeként vázoltak, természetes módon alakítható át *formális* szemantikává, amelyet a halmazelmélet valamely elfogadott rendszerében, mondjuk ZFC-ben fogalmazunk meg. A TTCFM kidolgozása szempontjából fontos, hogy a FOLDS szemantikája adekvát módon megfogalmazható egy toposzban, például egy Grothendieck toposzban. Vannak formális elméleteink a klasszikus FOLDS-ban csakúgy, mint az intuicionista FOLDS-ban, és mindkét változathoz van teljességi tételünk (lásd Makkai 1995). A klasszikus verzióból következik, hogy egy FOLDS-kijelentés halmazelméleti szemantikán alapuló bizonyítása mindig átalakítható egy olyan formális bizonyítássá, amely teljes egészében a FOLDS formalizmusán belül marad. Az intuicionista változatból hasonló konklúzió következik az intuicionista halmazelméletre nézve.

IV. AZ ABSZTRAKT HALMAZOK TÍPUSELMÉLETI NYELVÉNEK KIDOLGOZÁSA: A KONKRÉT KATEGÓRIASTRUKTÚRA

Lawvere-idézetünk (4)-es állítása nagyon fontos, bár formalizálás híján önmagában kissé homályos lehet. Tekintsük az „A és B számossága megegyezik” jelentését adottnak ezen a ponton (ez természetesen az ismerős jelentés). (4) egy *meta*állítás az elmélet *nyelvéről*, és ezt mondja ki: „ha az A és a B halmazok számossága megegyezik, akkor B osztozik az A minden *grammatikailag helyesen megfogalmazott* tulajdonságában. Más szavakkal: egy *ilyen* $P(-)$ tulajdonságra $P(A)$ akkor és csak akkor, ha $P(B)$. Lawvere állítása durván az, hogy a halmaz számossága *mindent* elmond, amit a halmazról *önmagában* el lehet mondani, *amennyiben csak a megfelelő nyelvet használjuk*. Fenntartom, hogy ez az a megállapítás, amely egy megfelelő formális nyelv szerkesztését *igényli;* egy olyan nyelvét, amely kielégíti a (4)-ben implicit követelményt. A „szokványos halmazelméletben” ha

$P(A)$-nak azt választjuk, hogy „5 eleme A-nak”, A-nak ebben a tulajdonságában nem osztozik az összes többi halmaz, amelynek a számossága megegyezik A-éval. Így a „szokványos halmazelméletben”, annak hagyományos formális (elsőrendű) nyelvével, a (4) állítás nyilvánvalóan hamis lesz. Lawvere nem tudta volna a (4) állítást megtenni, ha nem valamiféle megszorított nyelvben gondolkodott volna, amely – úgy gondolom – szükségszerűen kizárja a globális egyenlőséget, és amelyben az absztrakt halmazelmélet kifejtését elképzelte. Lawvere tanulmányában azonban nincs jele annak, hogy megkísérelte volna egy *ilyen* nyelv kodifikálását; és ami azt illeti, Lawvere más hasonló témájú munkáiban sem. Másfelől, mivel én éppen egy ilyen nyelvet javaslok, kötelességem válaszolni a kérdésre, hogy javaslatom megfelel-e Lawvere elvárásának. A „Lawvere imperatívusza” kifejezéssel arra az állításra fogok utalni, hogy a kérdésre „igen” a válasz. Lentebb formálisan is kimondom Lawvere imperatívuszát, adok rá egy bizonyításvázlatot, azután átfogalmazom egy általánosabb és érdekesebb formába is.

Az (5) passzus azt állítja, hogy lehetetlen a halmazok azonosságának elméletét (vagy például a csoportokét) a puszta „megegyező számosság” relációra (izomorfiára) redukálni.

Rátérek a maradékra: (6), (7) és (8). Ezek alkotják az absztrakt halmazok *kategóriastruktúráját*, pontosabban *konkrét* kategóriastruktúráját. A legfontosabb új fajta a Map, ami a „leképezést” képviseli; arra szolgál, hogy Map(A,B) típusokat formáljunk, ahol A és B halmazok (halmazváltozók). A mi absztrakt halmazelmélet-változatunkban, Lawvere-étől eltérően (nem sugalljuk azt, hogy „a miénk jobb”, mint Lawvere-é!), van egy fontos művelet, app az *alkalmazásra*; ha A:Set, B:Set, f:Map(A,B), x:A, akkor app(f,x):B. Van ebben az utolsó, „cukrozott FOLDS”-ban írt állításban némi csalás, hiszen valójában egy egzisztenciaállítást von maga után, nem pedig deklarációt – azt ugyanis, hogy valami, amit app(f,x)-nek hívunk, *létezik* a B elemeként. A tiszta-FOLDS kezelés eltávolítja a csalást: itt van egy további fajtánk, App, amellyel App(A,B,f,x,y) alakú típusokat formálhatunk, ahol A, f és x mint fentebb; továbbá y:B. Intuitíve a:App(A,B,f,x,y) azt jelenti, hogy a tanúsítja a tényt – sőt mi több, *oka* a ténynek –, hogy y:B *nem más, mint* app(f,x), vagyis f értéke, amikor x-re alkalmazzuk. Természetesen felvesszük azt az egzisztenciaaxiómát, hogy ilyen tanú (ok, tény) *létezik*:

$$\text{(Ax1)}\ \vdash \forall A,B{:}\mathrm{Set}\,.\,f{:}\mathrm{Map}(A,B)\,.\,x{:}\mathrm{El}(A)\,.\,\exists y{:}\mathrm{El}(B)\,.\,\exists a{:}\mathrm{App}(A,B,f,x,y)\,.\,\top.$$

A $\vdash$ szimbólum az ítéletjel, amelyet axiómákra tartunk fenn; a $\vDash$ jelet is fogjuk használni abban az esetben, ha tételről van szó, olyan állításról, amit bebizonyítottunk korábban már kimondott axiómákból és tételekből (ha vannak ilyenek). Az első kivételével minden univerzális kvantort elhagytam; a későbbiekben azt is el fogom hagyni.

Ebben az utolsó példában megmutatkozik egy nagyon fontos körülmény, amelyre nincs magyarázatom; az összes fontos egzisztenciaaxiómában, még a magasabb dimenziójú kategóriák elméletében is, ha helyesen fogalmazzuk meg, pontosan két egzisztenciális kvantor szerepel: nem egy, nem három, nem négy… hanem kettő. (Amikor korábban csak egy egzisztenciális kvantorunk volt, például az egyenlőségi axiómákban, akkor negligáltunk bizonyos magasabb dimenziójú hátteret, ami valójában ott van.)

Hadd vezessek be egy rövidített jelölést a legutóbbi formulára, amelyet később további magyarázat nélkül utánozni és bővíteni fogok.

$$(\text{Ax1}) \vdash f\colon A \to B \;.\; x{:}A \Rightarrow y{:}B \;.\; a{:}\text{App}(f,x,y)$$

Elhagytam azt a deklarációt, amely A-t és B-t halmaz típusúként vezeti be. Elhagytam a kvantorokat, az univerzálisakat a „⇒” bal oldalán, az egzisztenciálisakat a jobb oldalon. Lerövidítettem az App típus jelölését, és elhagytam a „⊤” kijelentéskonstanst. Ha nincs „⇒”, akkor minden kvantor univerzális.

Amit „cukrozott FOLDS-nak” neveztem, az J. Cartmell nyelve (Cartmell 1986) kvantifikációval kiegészítve (Cartmellnél nincsenek kvantorok). Ez egy nagyon *hasznos* nyelv: nagy kifejezőerejű és intuitív; mindazonáltal alapjaiban tér el attól a tiszta metafizikától, amelyre a FOLDS épül. Például használhatunk halmazok közötti egyenlőséget, és ha $A = B$ és $f{:}A \to B$, akkor $f{:}B \to B$, $f{:}B \to A$, $f{:}A \to A$. A cukrozott FOLDS teljes kifejtése rendkívül bonyolult, mert az egyenlőség révén „minden megengedett”; lásd Cartmell eredeti cikkét.

A tiszta FOLDS metafizikájának nézőpontjából a hagyományos értelemben vett műveletek (mint nálunk az app(f,x)) csak egy olyan egyenlőségfogalom jelenlétében teljesen értelmesek, amely szerint azt mondhatjuk, hogy egy művelet értéke bármely adott argumentumra *egyértelműen* meghatározott – márpedig FOLDS-ban az egyenlőség csak nagyon korlátozott esetekben hozzáférhető. Nem hozzáférhető például halmazok számára; így egy olyan művelet, amelynek az értéke halmaz, nem „tiszta FOLDS” művelet. A műveletekkel kiegészített FOLDS még mindig érdekes a megalapozásban érdekeltek számára: ők azt szeretnék tudni, hogy a műveletek *ideális* bővítései-e a tiszta FOLDS-nak, amelyek *metaelméleti eszközökkel eliminálhatók* mint a tiszta FOLDS konzervatív kiterjesztései. (Az utolsó mondatbeli felvetés David Hilbert metamatematikájából származik.) Ezzel elérkeztünk a tárggyal kapcsolatos kurrens matematikai problémák területére: oda, hogy van-e lényegi ekvivalencia a tiszta FOLDS kifejezések, valamint a naiv halmazelméleti, és ennél fogva könnyebben kezelhető fogalmak között.

A FOLDS tovább is cukrozható, és algebrai jelölésekkel írhatunk $f^{\backprime}x$-et, $f(x)$-et, vagy akár fx-et app(f,x) helyett.

A gazdaságosság kedvéért rövidítéseket fogunk bevezetni FOLDS jólformált formuláira, és a logikában szokásos módon *definiált fogalmaknak* nevezzük ezeket. Ahogy a szokványos logikában is, fel szabad cserélni a szabad változókat *megengedett* helyettesítéseikre a definiált fogalmakban, számítva arra, hogy érthetőek maradunk. A korábbiakkal összhangban A, B, C, D Set típusúként deklarált változókat képviselnek. „$f{:}A{\to}B$” ugyanaz a típusdeklaráció, mint „$f{:}\mathrm{Map}(A,B)$.” A következő definiált fogalmak mindegyikében először típusba sorolt változók egy kontextusa szerepel; e változók *mindegyikét* szabadnak kell tekinteni. Az első esetében például a standard uniform jelölés valami olyasmi lenne, hogy EQUAL (A,x,y); az $x = y$, amit ehelyett használunk, drasztikus rövidítés.

$$
\begin{array}{rclcl}
x : A \,.\, y : A & :: & x = y & :=: & \exists e : \mathsf{Equ}(A, x, y)\,.\,\top \\
x : A \,.\, y : A \,.\, f : A \to B & :: & y = f(x) & :=: & \exists a : \mathsf{App}(A, B, f, x, y)\,.\,\top \\
f : A \to B \,.\, g : A \to B & :: & f = g & :=: & \forall x : A, y : B\,. \\
& & & & (y = f(x) \to y = g(x)) \\
f : A \to B \,.\, g : B \to C\,. & & & & \\
h : A \to C & :: & h = gf & :=: & \forall x : A, y : B, z : C\,.\,(z = h(x) \leftrightarrow \\
& & & & \exists y : B\ (y = f(x) \wedge z = g(y))) \\
f : A \to A & :: & f = \mathsf{id}_A & :=: & \forall x : A, y : A\,.\,(y = f(x) \leftrightarrow y = x) \\
f : A \to B & :: & \mathsf{Iso}(f) & :=: & \exists g : B \to C\,, i : A \to A, j : B \to B\,. \\
& & & & (i = \mathsf{id}_A \wedge j = \mathsf{id}_B \wedge i = gf \wedge j = fg) \\
& & A \ \mathsf{iso-to}\ B & :=: & \exists f : A \to B\,.\,\mathsf{Iso}(f)
\end{array}
$$

A fenti definiált fogalmak jelölésében közönséges egyenlőségjelet használtunk: =. De ez inkább csak emlékeztető egy analógiára, mintsem közvetlen azonosítás a közönséges egyenlőségfogalommal. A definiált $x = y$ kifejezésnek a bal oldalon szereplő típusdeklarációk mellett van értelme, és a szabad változói valójában nem csak x és y, hanem A, x és y. Az a tény, hogy a nem jelenik meg a jelölésben, komolyabb visszaélés a nyelvvel, mint az = szimbólum használata. Az „$y = f(x)$” kifejezésben A, B, f, x és y a szabad változók.„$y = f(x)$” nem áll elő helyettesítéssel valamilyen „$y = z$”-ből; FOLDS-ban nincsenek olyan terminusok, mint $f(x)$.

A $\exists!$ szimbólumot a szokásos módon rövidítésként használjuk; bármely típusos változó elé illeszthetjük. Most pedig további axiómákat sorolunk fel.

(Ax2) Az egyenlőség ekvivalenciareláció:

$$\vdash x,y,z{:}A\ .\ (x = x \wedge (x = y \to y = x) \wedge ((x = y \wedge y = z) \to x = z)).$$

(Ax3) A függvényalkalmazás jóldefiniált:

$$\vdash f{:}A{\to}B\ .\ x,u{:}A\ .\ y{:}B\ .\ ((x = u \wedge y = f(x)) \to y = f(u)).$$

(Ax4) A függvényalkalmazás *műveletszerű*, az érték egyértelműen meghatározott.

$$\vdash f{:}A{\to}B\ .\ x{:}A\ .\ y,z{:}B\ .\ ((y = f(x) \wedge z = f(x)) \to y = z).$$

(Ax5) A függvényalkalmazás *invariáns* az egyenlőségre:

$$\vdash f{:}A{\to}B\ .\ x{:}A\ .\ y,z{:}B\ .\ ((y = f(x) \wedge y = z) \to \mathrm{z} = f(x)).$$

(Ax6) Identikus morfizmus létezése:

$$\vdash \top \Rightarrow f\colon A \to A \;.\; f = \mathrm{id}_A.$$

(Ax7) Komponálható nyilak kompozíciójának létezése:

$$\vdash f{:}A \to B \;.\; g{:}B \to C \Rightarrow h{:}A \to C \;.\; h = gf.$$

Az (Ax1)–(Ax7) axiómák az *absztrakt halmazok minimális elméletének* axiómái. Ezt az elméletet $\mathrm{T}_{\mathrm{abssmin}}$ fogja jelölni. $\mathrm{T}_{\mathrm{abssmin}}$ egy *mintatétele* az asszociativitási törvény; egy lehetséges formájában:

$$\vdash f{:}A \to B \;.\; g{:}B \to C \;.\; h{:}C \to D \;.\; i{:}A \to C \;.\; j{:}B \to D \;.\; k{:}A \to D \;.$$
$$((i = gf \wedge j = hg \wedge k = hi) \to k = jf)$$

A fentebb megadott informális szemantika elegendő kell, hogy legyen az olvasó számára a tétel bizonyításához, megmutatva, hogy az következik az axiómákból. Mégis úgy vélem, megéri a fáradságot, hogy belemenjünk a nyelv formális szemantikájának részleteibe.

Kezdésként újradefiniáljuk $\mathrm{L}_{\mathrm{abss}}$ típusstruktúráját. $\mathrm{L}_{\mathrm{abss}}$ az absztrakt halmazok különféle lehetséges axiomatikus elméletei – köztük $\mathrm{T}_{\mathrm{abssmin}}$ – *mögött* álló nyelv.

– A:Set
– A:Set :: x:El(A)
– A,B:Set :: f:Map(A,B)
– A:Set :: x,y:El(A) : e:Equ(A,x,y)
– A,B:Set :: f:Map(A,B) . x:El(A) . y:El(B) : a:App(A,B,f,x,y)

Minden egyes sor egy szabály arra, hogy hogyan lehet új változót bevezetni a korábban bevezetett változókra támaszkodva. Például az Equ(A,x,y) típus, és vele együtt az e:Equ(A,x,y) változódeklaráció is akkor és csak akkor helyes grammatikailag, ha A:Set (A egy Set típusú változó), és x,y:El(A) (x és y az El(A) típusba tartozó változók). Megfigyelhetjük, hogy a változóismétlést tartalmazó

$$A{:}\mathrm{Set} \;.\; x{:}\mathrm{El}(A) \;.\; e{:}\mathrm{Equ}(A,x,x)$$

és

$$A{:}\mathrm{Set} \;.\; f{:}\mathrm{Map}(A,A)$$

deklarációk helyesek, hiszen követik a szabályokat.
A (jólformált) formulák szerkesztési szabályait korábban már leírtuk általában a FOLDS-ra.

Az $\mathrm{L}=\mathrm{L}_{\mathrm{abss}}$ nyelv halmazelméleti (vagy *enszemblista*) szemantikáját megadhatjuk úgy, hogy a fenti típus-hozzárendelési szabályokat az L interpretációjának specifikációjává alakítjuk. Egy L-struktúrát adunk meg; mondjuk M-et. Egy halmazrendszert kell megadnunk, amely a következőkből áll:

- az M(Set) halmazból;
- M(Set) (minden) A elemére az M(El)(A) halmazból;
- M(Set)-beli A-ra és B-re az M(Map)(A,B) halmazból;
- M(Set)-beli A-ra és M(El)(A)-beli x, y-ra az M(Equ)(A,x,y) halmazból;
- M(Set)-beli A-ra és B-re, valamint M(Map)(A,B)-beli f-re, M(El)(A)-beli x-re és M(El)(B)-beli y-ra az M(App)(A,B,f,x,y) halmazból.

Az L-struktúrának ez a leírása nyelvünk formális szemantikájának definiálására van szabva. Amikor egy formulát kiolvasunk egy M L-struktúrában, akkor minden egyes változót a megfelelő M-beli típus egy elemeként olvasunk: például egy t:App(A,B,f,x,y) változót az M(App)(A,B,f,x,y) elemeként, ahol A, B, f, x és y alkalmas elemek, vagyis A és B az M(Set)-ben van, x az M(El)(A)-ban, y pedig az M(El)(B)-ben. A $\exists t$:App(A,B,f,x,y) kvantornak világos jelentése van, amikor M-ben olvassuk ki: azt értjük rajta, hogy van egy t az M(App)(A,B,f,x,y) halmazban.

Hadd jegyezzem meg, hogy szinte minden korábbi írásomban és előadásomban egy egyszerűsített szemantikát használtam, amely klasszikus esetben ekvivalens a fentebb megadottal. Az egyszerűsített változatban az L-struktúra egy Set-értékű *funktor* egy bizonyos, a nyelvhez társított kategóriából. A FOLDS eredeti közlésekor, a Makkai 1995 monográfiában leírok egy „családi megközelítést" is a FOLDS-hoz általában; ennek a megfelelő speciális esetét alkalmaztuk itt (lásd a 22. és 23. oldalakon az idézett monográfiában). Az absztrakt halmazok metafizikájának szempontjából a „családi megközelítés" a találóbb.

A szokásos módon beszélhetünk L egy mondatának *modelljeiről*, egy T elmélet *modelljeiről* és T egy *tételéről*. A fenti szemantikával nem nehéz igazolni, hogy az asszociativitási törvény tétele $\mathrm{T}_{\mathrm{abssmin}}$-nek.

$T = \mathrm{T}_{\mathrm{abssmin}}$ egy nagyon elemi elmélet. T modelljei lényegében a *konkrét kategóriákkal* esnek egybe, vagyis egy kis C kategóriával, amelyhez tartozik egy hű F:C→Set funktor. Pontosabban: legyen (C,F) egy konkrét kategória. Definiáljuk az M L-struktúrát a következőképpen:

- M(Set) = Ob(C);
- ha A az M(Set)-ben van: M(El)(A) = F(A);
- ha A és B az M(Set)-ben van: M(Map)(A,B) = {f∈ Arr(C): f:A→B};
- ha A az M(Set)-ben van, x és y az M(El)(A)-ban: M(Equ)(A,x,y) = {∅}, ha $x = y$, máskor M(Equ)(A,x,y) az üres halmaz;
- ha A és B az M(Set)-ben van, f pedig az M(Map)(A,B)-ben, x az M(El)(A)-ban és y az M(El)(A)-ban, akkor M(App)(A,B,f,x,y) = {∅}, ha $(Ff)x = y$, máskor M(App)(A,B,f,x,y) az üres halmaz.

Nevezzünk egy konkrét kategóriából ilyen módon nyert L-struktúrát konkrét L-struktúrának. A következők teljesülnek:

(i) Minden konkrét L-struktúra modellje *T*-nek.

(ii) Van elég konkrét L-struktúra: bármely L-ben tett FOLDS-beli kijelentés, amely minden konkrét L-struktúrában igaz, igaz *T* minden modelljében.

(i) bizonyítása közvetlen verifikáció; (ii) bizonyításához tulajdonságokat kell bizonyítani egy tetszőleges M modellre – például az asszociativitási törvényt –, majd végrehajtani egy műveletet, amelynek része, hogy ekvivalenciaosztályokat képzünk az elemekből és nyilakból. Így eljutunk egy [M] konkrét L-struktúrához, amely egy nagyon erős értelemben ekvivalens M-mel (FOLDS-ekvivalencia); és ennek következtében: M és [M] ugyanazokat az L-mondatokat elégítik ki.

Most már kimondhatjuk és bebizonyíthatjuk azt, amit a Lawvere-imperatívusznak neveztünk: „[egy absztrakt halmaznak] a számosságán túl nincs külső tulajdonsága."

Állítás: *Lawvere imperatívusza* Bármely $\phi(A)$ formulára, amelynek A az egyetlen szabad Set-változója, a következő tétel $T_{abssmin}$-ben:

$$\vDash ((\phi(A) \wedge A \text{ iso-to } B) \rightarrow \phi(B)).$$

Az állítás egy tételséma a $T_{abssmin}$ elméletben, amennyiben végtelen sok, a ϕ paramétertől függő $T_{abssmin}$-beli tételt mond ki.

Kategóriákban fogalmazva: ha egy konkrét kategóriában egy *a* objektumnak van egy, a FOLD L nyelvén kifejezhető tulajdonsága, akkor bármely más *B* objektum, amely izomorf *A*-val, rendelkezni fog ugyanezzel a tulajdonsággal.

Természetes módon a bizonyításnak ϕ összetettsége szerinti indukcióval kell történnie, ami pedig egynél több változós formulákkal jár.

Legyen *x változókontextus*, vagyis egy véges változóhalmaz, amelyet úgy kapunk meg, hogy egymás után csatoltunk a meglevőekhez a fentebb kimondott szabályok szerint deklarált változókat. Legyen *y* az *x* egy diszjunkt izomorf másolata – röviden: *másolata* –, ahol az izomorfizmus egy *x*-beli *x*-et az *y*-beli $\bar{x}$-be képez le. Konstruáljunk a következőképpen egy új $I(X,\mathrm{Y})$ kontextust, amely az $X \cup Y$ kiterjesztése. Minden egyes *x*-beli Set típusú *x*-re legyen $i(x)$ egy új $\mathrm{Map}(x,\bar{x})$ típusú változó; és adjunk minden ilyen $i(x)$-et hozzá $X \cup Y$-hoz. Definiáljuk $\mathrm{Iso}(X,Y)$-t a következő formulák konjunkciójaként:

– ha x: Set x-ben van, akkor a formula $\mathrm{Iso}(i(x))$;

– ha x,y:Set, f:x$\rightarrow y$ mind X-ben van, akkor az a formula, amely kimondja, hogy az alábbi

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i(x)"'] & y \arrow[d, "i(y)"] \\ \bar{x} \arrow[r, "\bar{f}"] & \bar{y} \end{tikzcd}$$

négyzet kommutál; ez a formula a következő:

$$\exists k{:}x\to\bar{y}\ .\ k = i(y)\ .\ \mathrm{f} \wedge \mathrm{k} = \bar{f}\ .i(x);$$

– ha x:Set, y:El(x) X-ben van, akkor a $\bar{\mathrm{u}}$ = (i(x))(u) formula.

Állítás: Legyen ϕ egy formula, és X a formula szabad változóinak kontextusa. A fentebb definiált Iso(X,Y) formulával a következő tétel $\mathrm{T}_{\mathrm{abssmin}}$-ben:

$$\vDash\ \phi(X) \wedge \mathrm{Iso}(X,Y) \to \phi(Y).$$

Tegyük fel, hogy X és X' kontextusok, és X részkontextusa X'-nek úgy, hogy $X'\setminus$X egy egyelemű $\{u\}$ halmaz. A nyelvünkben megengedett ötféle változódeklarációval összhangban u-nak ötfajta típusa lehet. Az ötödik lehetőség például az, hogy u:App(A,B,f,x,y) megfelelően deklarált X-beli A, B, f, x és y változókra. Legyen továbbá Y' az X' egy másolata úgy, hogy Y' kiterjesztése az X kontextus egy Y másolatának. Az $I(X',Y')$ kontextust konstruáljuk meg úgy, hogy kiterjesztése legyen az $I(X,Y)$ kontextusnak.

Tekintsük az $I(X',Y')$ kontextust. A következő új elemek vannak benne I(X-,Y)-hoz képest: u és $\bar{u}$, és ha u:Set, akkor még egy, az $i(u){:}u\to\bar{u}$ nyíl. Az Iso(X',Y') formula rendelkezésünkre áll az $I(X',Y')$ kontextusban. Írjunk $\mathrm{Iso}^*(X',Y')$ -t a

$$\exists i(u){:}u\to\bar{u}\ .\ \mathrm{Iso}(X',Y')$$

formula helyett, ha u:Set; máskor pedig legyen $\mathrm{Iso}^*(X',Y')$ ugyanaz, mint Iso(X',Y'). Az $\mathrm{Iso}^*(X',Y')$-beli szabad változók halmaza mindkét esetben $I(X,Y) \cup \{u,\bar{u}\}$.

Lemma: A fenti jelölésekkel a következő formula (univerzális lezártja) tétel $\mathrm{T}_{\mathrm{abssmin}}$-ben:

$$\vDash\ \mathrm{Iso}(X,Y) \to \forall\ \mathrm{u}{:}\tau\ .\ \exists\bar{u}{:}\ \bar{\tau}\ \mathrm{Iso}^*(X',Y').$$

„u:τ az u típusdeklarációja (fentebb adtunk rá egy példát); $\bar{u}$ pedig u másolata Y'-ben.

A lemma azt fejezi ki, hogy az x és y „diagramok” bármely f izomorfizmusára és bármely „x-re alapozott” új u elemre tudunk találni egy $\bar{u}$ „y-ra alapozott” elemet úgy, hogy ki tudjuk terjeszteni f-et $X' = X \cup \{u\}$-ról $Y' = Y \cup \{\bar{u}\}$-ra képező izomorfizmussá. A kategóriaelmélész számára ez trivialitás, kivéve, hogy itt a „diagram” értelme árnyalatnyit különböző és tágabb, mint a kategóriaelméletben. A lemma bizonyítása nem jelent nehézséget; csak a fentebb említett „öt esetet” kell különválasztani.

Az Állítás bizonyítása is egyszerű a lemma felhasználásával.

Az utolsóként kimondott állítás figyelemre méltó módon kiterjeszti „Lawvere imperatívuszát”, és ennek jelentősége van a strukturalizmus szempontjából; „Benacerraf imperatívuszának” is nevezhetjük – lásd (Benacerraf 1965), (McLarty 1993), (Makkai 1999). Vegyük a *csoport* fogalmát az absztrakt halmazelméletben ugyanannak, ami a fogalom standard adoptációja a kategóriaelméletben: *csoport-objektum* egy kategóriában. A csoport-objektum egy *diagram*, amely a következőkből áll: egy G objektumból – számunkra ez egy halmaz –; egy másik halmazból, a $G \times G$ (kategoriális) szorzatból a ϖ_0 és ϖ_1:$G \times G \to$ G projekciókkal; az m: $G \times G \to G$ csoportműveletből; és az $1 \to G$ egységleképezésből (ahol 1 a terminális objektum, ez az absztrakt halmazelméletben egyelemű halmaz); ezekkel az adatokkal együtt feltételek is adottak, amelyek először is azt specifikálják, hogy a $G \times G$ a projekciókkal valóban kategoriális szorzat, 1 pedig egy egyelemű halmaz, és azután – és főképpen – a szokásos csoporttörvényeket. Nézőpontunkból az említett feltételek egyáltalán nem számítanak: két csoport izomorfizmusának fogalma ugyanaz, mint két diagram izomorfizmusáé az Állításban, csak két változófajta szerepel bennük, a halmaz típusúak és a nyíl típusúak. A végeredmény az, hogy egy csoport minden olyan tulajdonsága, amely kifejezhető az absztrakt halmazok *bármely T* FOLDS elméletében, (de) *az adott* L *nyelvben*, és teljesíti azt a minimális feltételt, hogy T kiterjesztése T_{abssmin}-nek, invariáns a csoportizomorfizmusokra.

V. TOVÁBBI MEGFONTOLÁSOK A HALMAZOKRÓL; TÚL A HALMAZOKON

Azt, ahogy az előző szakaszokban bemutattuk az absztrakt halmazelméletet, az elmélet tisztán analitikus részének nevezhetjük. Vannak további, szintetikus természetű megfontolások is: ítéletek absztrakt halmazok létezéséről, és általánosabban: *absztrakt struktúrák* létezéséről, amelyek részint absztrakt halmazokból állnak, részint más entitásokból, amelyeket a nyelvben előírt tulajdonságokkal nevezünk meg. (Az absztrakt struktúrákat tekinthetjük *realizált kontextusoknak*, utalva a *változók kontextusának* szintaktikai fogalmára. A fentebb tárgyalt csoportok példával szolgálnak absztrakt struktúrára.) A ZFC halmazlétezési axiómái szintetikus ítéletek az elsőrendű axiomatikus halmazelmélet metafizikájának kontextusában (elsőrendű logikán egyenlőségjeles elsőrendű logikát értek a szokásos értelemben). Az alábbiakban rá fogok mutatni arra, hogy az absztrakt halmazelmélet analitikus keretei alkalmasak az elsőrendű halmazelméleti ítéletek kifejezésére, am*ennyiben elfogadjuk a regularitási axiómát*. Ennek az az oka, hogy lehetséges adekvát módon absztrakt struktúrákként kezelni a *tiszta halmazokat*, azokat a halmazokat, amelyekre igaz a regularitási axióma.

Másfelől a TTCFM túlmegy az absztrakt halmazelméleten. A halmazlétezés problémái a tisztahalmaz-elméletben, amelyek a Burali-Forti-paradoxonban öltenek testet, arra ösztönöznek bennünket, hogy új, kategóriaelméleti módon konstruáljuk meg az absztrakt halmazok összességét mint egy *sajátos kategóriát*, a *halmazok kategóriáját*. Bevezetjük a kategóriák nyelvét, amelyben egyetlen kiinduló fajta van, a CATEGORY. Az absztrakt kategóriaelméletben a *C*:CATEGORY változódeklaráció (*C* helyén esetleg másik betűvel) nyit meg minden kontextust (változódeklarációs rendszert), ugyanúgy, ahogy az absztrakt halmazelméletben *A*:SET (*A* helyén esetleg másik betűvel) nyit meg minden kontextust. Ahogy az absztrakt halmazok nyelve természetes módon elvezetett a kategória fogalmához, és azután a kategóriák nyelvéhez, a kategóriák nyelve is utat nyit annak, hogy a kategóriák összességét a *kétdimenziós kategória* sajátos eseteként tekintsük, a *kategóriák kétdimenziós kategóriájaként*. Ebben a halmazok kategóriája sajátos alapvető objektumként jelenik meg, amelyet bizonyos specifikációk karakterizálnak; nincs a fregei abszolút értelemben egyedileg karakterizálva, hanem csak kategoriális ekvivalencia erejéig. Ez a fogalom veszi át a halmazokról szólva a „megegyező számosságú" („izomorf") helyét.

Ahogy a kategória nem halmaz (nincs mögötte halmaz, mert objektumaira nem tesszük fel az egyenlőséget), a kétdimenziós kategória sem kategória többé, még csak nem is hozzáadott struktúrával rendelkező kategória. Például az 1-cellák (nyilak) kompozíciója nem (szigorúan) asszociatív.

Természetes módon merül fel ezen a ponton, hogy minden nemnegatív egész n-re kellene léteznie n-kategóriának (az $n = 0$ a halmazok esete) úgy, hogy *az n-kategóriák összessége n* + 1-*kategória*. És itt felsejlik egy történet, amely még korántsem ért véget, mert (érdekes!) matematikai bonyodalmak merülnek fel. A történetet az hajtja előre, amit fregei imperatívusznak nevezek: *értelmezd* a szintézis folyamatának egy korábbi pontján bevezetett, világosan határolt fajtába tartozó entitások összességét – *ha szükséges*, egy újfajta összesség speciális eseteként. Megjegyzem, hogy az ω-kategóriák összessége maga is ω-kategória; itt az „új" totalitás már nem egy újfajta példánya!

Itt szükségesnek tűnik tisztázni néhány grammatikai kérdést. Mint az előző szakaszban rámutattunk, az absztrakt halmazok (többes szám!) nyelvét lehet *egyetlen konkrét* kategória nyelvének tekinteni. Használhattuk volna ehelyett *egyetlen* kategória („konkrét" nélkül) FOLDS nyelvét is, és ezen a módon közelebb is kerültünk volna Lawvere szándékához, az (elemi) toposz fogalmának bevezetéséhez. Egyetlen kategória $\mathrm{L}_{\mathrm{cat}}$ tiszta FOLDS-nyelve explicit módon ki van fejtve (Makkai 1998)-ban; számtalanszor használtam is a FOLDS-ról beszélve. A toposz-axiómák jólformált FOLDS-mondatokként jelennek meg $\mathrm{L}_{\mathrm{cat}}$-ban. Az előző szakaszokban tárgyalt $\mathrm{L}_{\mathrm{abss}}$-hez hasonlóan $\mathrm{L}_{\mathrm{cat}}$-nak is öt „fajtája" van, de persze ezek a fajták nem ugyanazok. A fő különbség az, hogy L_{cat}-ban – csakúgy, mint Lawvere metafizikájában – a kompozíció primitív. L_{cat} *interpretálható* L_{abss}-ben, és ezt az interpretációt valójában javarészt el is végeztük az előző szakaszban. Az említett interpretálhatóság lényegében ugyanaz, mintha azt mondanánk, hogy minden konkrét kategóriának van egy mögöttes kategóriája. A kategóriák (többes szám!) nyelve, amelyet az előző bekezdésben említettünk, „magasabb" nyelv, amelyben a kategóriák pluralitása *egy változó értéktartományául* szolgál.

Az előző bekezdésekben elmondottak igen vázlatosak. Elhallgattam például a „gyenge" jelzőt a „magasabb kategória" kifejezés mellől. Ha az olvasó el akarja helyezni a fentebb elmondottakat a szakirodalom kontextusában, akkor ki kell egészítenie ezzel a jelzővel az olyan kifejezéseket, mint „kétdimenziós kategória", „n-kategória" stb.

Hadd térjek vissza a tiszta halmazokra. Helyezkedjünk egy (egyenlőségjeles) elsőrendű halmazelméletbe, mint a ZFC – bár ennek az elméletnek csak egy kis töredékére van szükségünk, és ami fontosabb: csak intuicionista logika kell a gondolatmenethez. Legyen x egy tetszőleges halmaz, és $\mathrm{tr}(\{x\})$ legyen az egyelemű $\{x\}$ tranzitív lezártja, vagyis a legszűkebb olyan y halmaz, amely tranzitív ($u \in v \in y$-ból következik $u \in y$), és tartalmazza x-et. Tekintsük azt az x struktúrát, amelynek mögöttes halmaza $\mathrm{tr}(\{x\})$, kitüntetett benne az x elem, és tartalmazza a mögöttes halmazra korlátozott $\in$ relációt. Ki fog derülni, hogy *ha feltesszük a regularitási axiómát* – amit mostantól megteszünk –, az $X[x] = (\mathrm{tr}(\{x\});x,\in\restriction\mathrm{tr}(\{x\}))$ struktúrák, amelyeket egy tetszőleges (tiszta) x halmaz meghatároz (a regularitási axióma értelmében minden halmaz tiszta) *izomorfia erejéig karakterizálhatók tisztahalmaz-struktúrákként*, azon $X = (|X|;x,E)$ struktúrákként, amelyekben E bináris reláció x-en, x eleme x-nek, és kielégítik az alábbi feltételeket:

(1) E tranzitív: $uEvEw$-ből következik uEw;

(2) E jólfundált: nevezzük x egy a részhalmazát induktívnak, ha bármely $u \in$ X-re abból a tényből, hogy $\{v{:}\ vEu\}$ részhalmaza A-nak, következik, hogy u az A-ban van. A feltétel az, hogy ha A induktív, akkor $A = |X|$;

(3) E extenzionális: $u = v$ akkor és csak akkor, ha minden w-re wEu akkor és csak akkor, ha wEv;

(4) $|X|$ az $\{x\}$ leszálló E-lezárása: X bármely A részhalmazára ha $x \in A$ és bármely $v \in A$-ra és olyan u-ra, amelyre uEv, teljesül, hogy u az A-ban van, akkor $A = |X|$.

Az $X[x]$ tisztahalmaz-struktúrákat standard tisztahalmaz-struktúrának nevezzük. A következőt állapíthatjuk meg:

Minden X tisztahalmaz-struktúrához létezik pontosan egy x tiszta halmaz úgy, hogy X izomorf $X[x]$ *-szel; továbbá az* $X \to X[x]$ *izomorfizmus egyértelműen meghatározott.*

Valójában az x megkülönböztetett elemet ki is lehet venni a struktúra elnevezéséből, és ehelyett csak a létezését biztosító (4) feltételt megkövetelni, hiszen ha létezik ilyen x, akkor szükségképpen egyedi is.

Az imént kimondott állítás egy változata a Mostowski suvasztási lemmaként ismert eredménynek. Az $X = (|X|,E)$ *tranzitív struktúrákra*, a kitüntetett elem és (4)-es feltétel nélküli tisztahalmaz-struktúrákra az teljesül, hogy bármely X és Y tranzitív struktúrára legfeljebb egy struktúratartó morfizmus van X-ből Y-ba, és ha $f:X \to \mathrm{Y}$ ilyen, akkor f az X-et Y egy kezdőrészhalmazába képezi le, vagyis $|Y|$ olyan B részhalmazába, amelyre $u(E^Y)v$-ből és $v \in \mathrm{B}$-ből az következik, hogy u benne van B-ben. Speciális esetként egyetlen $X \to \mathrm{X}$ leképezés van, az identikus leképezés. Továbbá minden x tranzitív struktúrára pontosan egy y tranzitív halmaz van úgy, hogy x izomorf $(\mathrm{y},\in|y)$-nal. Rendszerint ez utóbbi állítás az, amit Mostowski-lemmának neveznek.

Jelölje $x[X]$ a kiemelt állításban szereplő egyértelműen meghatározott x-et. X és Y mostantól tisztahalmaz-struktúrát jelent; $X = (|X|;x,E_X)$, $Y = (|Y|;y,E_Y)$. $X(\mathrm{EQUALS})Y$ rövidíti azt az állítást, hogy x izomorf y-nal, $X(\mathrm{EPSILON})Y$ pedig a következő állítást: van olyan

$$f:(X,E_X) \to (Y,E_Y),$$

amelyre $f(x)(E_Y)y$. A következő két eredmény bizonyítható halmazelméletünkben:

Bármely X és Y tisztahalmaz-struktúrára $X(\mathrm{EQUALS})Y$ akkor és csak akkor, ha $x[X]=y[Y]$, és $X(\mathrm{EPSILON})Y$ akkor és csak akkor, ha $x[X]$ eleme $y[Y]$-nak.

Az olvasó valószínűleg látni fogja, hogy a fenti eredmények a tisztahalmaz-elmélet teljes absztrakthalmaz-elméleti jellemzését jelentik. Tekintsük $\mathrm{L}_{\mathrm{abss}}$-ben a következő változódeklarációt:

$$A,E:\mathrm{Set}\ .\ l,r:\mathrm{E}\to A\ .\ x:\mathrm{El}(A).$$

A két $E\to A$ nyíl célja az, hogy az A halmaz feletti bináris relációt pótolja. FOLDS-ban tudunk olyan ϕ formulát írni, amely pontosan az említett három szabad változót tartalmazza, és amely azt *fejezi ki*, hogy (A,x,E) tisztahalmaz-struktúra. $\phi(A,E,l,r,x)$ azt mondja ki, hogy A egy halmaz, (E,l,r) egy reláció A-n – értve ezen, hogy bármely A-beli a-ra és b-re legfeljebb egy e van E-ben úgy, hogy $l(e) = a$ és $r(e) = b$ (ha van ilyan e, azt úgy mondjuk, hogy aEb) –, és az (1)–(4) feltételek teljesülnek. A formula $\mathrm{L}_{\mathrm{abss}}$-beli megfogalmazásához szükségünk van arra, hogy *a részhalmazairól* tudjunk beszélni az absztrakt halmazelméletben; ebben a toposzelmélet javaslatát követjük. Lawvere 1976-ban, amely a jelen tanulmány kiindulópontja, sok információt találunk a toposzelmélet motivációjáról és annak matematikájáról is.

A tiszta halmazelmélet axiómái kimondhatók az absztrakt halmazelméletben. Az extenzionalitási axióma például ilyen formát ölt:

$$\forall X\,\forall y\,(\phi(X) \wedge \phi(Y) \rightarrow (X(\text{EQUALS})Y \leftrightarrow$$
$$\forall Z(\phi(Z) \rightarrow (Z(\text{EPSILON})X \leftrightarrow Z(\text{EPSILON})Y)))).$$

Természetesen itt x és y rendezett n-eseket rövidítenek, mint a fenti (A,E,l,r,x) a megfelelő deklarációkkal. Lesz majd egy könnyű metatételünk arról, hogy az így kapott L_{abss} feletti elmélet deduktívan ekvivalens a tisztahalmaz-elmélettel, amellyel indítottunk.

Azért részleteztem a fentiekben a tiszta halmazokat, hogy hangsúlyozzam: az absztrakt halmazelmélet szempontjából a szokásos axiomatikus halmazelmélet (amelyben feltesszük a regularitási axiómát) egy sajátos *struktúrafajta elmélete*, hasonlóan a csoportokhoz vagy a topologikus terekhez. A topologikus terek itt relevánsabbak, mert a definíciójuk nem elsőrendű, mint a csoportoké. A tiszta halmazok sem elsőrendben definiált struktúrák: erről tanúskodnak az univerzális kvantorok a definíciójukban.

A tisztahalmaz-elmélet kidolgozása az absztrakthalmaz-elméleten belül csak akkor természetes dolog, ha az absztrakt halmazok egy *természetes* axiómarendszerére épül. A kidolgozás során a fentebb megadott $\phi(X)$ formulát használnánk a „tiszta halmaz” definiálására. Ezt a definíciót úgy kezelnénk az elméletben, ahogy például a topologikus tér definícióját kezeljük a topológiában.

Az absztrakt halmazokra természetes axiómarendszert kapunk, ha $T_{abssmin}$ kiterjesztéseként felvesszük a nyelvünkben megfogalmazott toposzaxiómákat. Nevezzük a kapott elméletet T_{topos}-nak; ennek nyelve továbbra is az L_{abss} lesz. Két példa T_{topos} tételeire: mind a fentebb kimondott „extenzionalitási axióma”, mind a szokásos hatványhalmazaxióma L_{abss}-beli fordítása bizonyítható. Más, erősebb rendszerek is elgondolhatók; például felvehetünk egy korlátozás nélküli részhalmazkomprehenziós sémát (vö. Makkai 2010).

Az absztrakt halmazelmélet nézőpontjából azt kell mondanunk: természetellenes és szükségtelen is feltételezni, hogy minden csoport mögött egy olyan halmaz van, amely tisztahalmaz-struktúrával rendelkezik, és ennek a struktúrának semmi köze magához a csoporthoz – de észre kell vennünk, hogy a szokásos axiomatikus halmazelmélet (ha a naiv halmazelmélet nem is) éppen ezt a „fölösleges” feltevést teszi meg.

VI. TÖRTÉNETI MEGJEGYZÉSEK

A FOLDS kifejtését lásd Makkai 1995 és Makkai 1998. A TTCFM további aspektusait lásd Hermida *et al.* 2000/2001/2002 és Makkai 1999/2004.

2003 nyarán, az ASL Chicago-beli ülése után két üzenetet küldtem a FOM listára (fom@nyu.edu); az elsőt június 22-én, a másodikat július 18-án (lásd Makkai 2003). Ezekben felvázoltam az absztrakt halmazok e tanulmányban tárgyalt rendszerét. Az L_{abss} nyelvet szóról szóra ugyanígy adtam meg a második üzenet 5. oldalán. Nem mondtam ki azt a két állítást, amelyeket ma Lawvere- és Benacerraf-imperatívusznak nevezek, de a második üzenet 3. oldalán így fogalmaztam: „lesznek metamatematikai eredményeink, amelyek szavatolják, hogy pontosan azt tesszük, ami szükséges a megfelelő invarianciatulajdonságok megtartásához az összes állításban és konstrukcióban", például a csoportokra vonatkozóan. A tiszta halmazok kezelésére, amit itt viszonylag részletesen megadtunk, a második üzenet utal.

E tanulmánynak fontos előfutára Colin McLarty tanulmánya (McLarty 1993). Ő Lawvere 1964-ből indul ki, és azt állítja, hogy a Lawvere-féle Halmazok Kategóriájának Elemi Elmélete (Elementary Theory of the Category of Sets; ETCS) olyan elmélet, amely megfelel az általam Benacerraf-imperatívusznak nevezett elvnek. A 494. oldalon megtaláljuk a Benacerraf-imperatívusz egy fontos esetének kimondását a természetesszám-objektumra mint absztrakt struktúra speciális esetére, és a tanulmány 495. oldalán megtaláljuk a Lawvere-imperatívusz kimondását is. Találunk bizonyításvázlatokat arra, hogy ezek az állítások ETCS-ben tételsémák. Itt is érvényesek azonban a Lawvere fentebbi (4) passzusában tett állítással szembeni fenntartásaim: ahogy Lawvere tanulmánya, úgy McLartyé sem ad meg egy adekvát mögöttes nyelvet azokhoz az állításokhoz, amelyeknek invariánsnak kellene lenniük az izomorfizmusra. Az egyetlen – de lényegi – újdonság a jelen tanulmányban és annak korábbi változataiban – (Makkai 2003) egy ilyen nyelv, az absztrakt halmazelmélet FOLDS nyelve.

A Lawvere 2005 tanulmány reprint Lawvere 1964 már 1965-ben létező teljes verziójából. Lawvere 2005 részletesen kifejti az absztrakt halmazok elméletét klasszikus (boole-i) elsőrendű logikában. Bár Lawvere 2005 nem utal arra, hogy az elsőrendű logikát korlátozni lehetne vagy kellene azon a módon, ahogy L_{abss} teszi, a Lawvere 2005-ben kifejtett elmélet minden lényegi tartalmi változtatás nélkül lefordítható az absztrakt halmazelmélet FOLDS-ban, a L_{abss} nyelven történő kifejtésére.

A tiszta halmazok versus absztrakt halmazok jelen tárgyalása rokon Johnstone 1977 9.2. szakaszával.

Mekis Péter fordítása

IRODALOM

Benacerraf, Paul 1965. What Numbers Could Not Be. *Philosophical Review* 74. 47–73.

Cartmell, John 1986. Generalized Algebraic Theories and Contextual Categories. *Annals of Pure and Applied Logic* 32. 209–243.

Feferman, Solomon 1977. Categorical Foundations and Foundations of Category Theory. In *Logic, Foundations of Mathematics and Computability Theory* (Proc. Fifth Internat. Congr. Logic, Methodology and Philos. of Sci., Univ. Western Ontario, London, Ont., 1975). Univ. Western Ontario Ser. Philos. Sci. 9. kötet. Dordrecht, Reidel. 149–169.

Hermida, Claudio – Makkai Mihály – John Power 2000/2001/2002. On Weak Higher Dimensional Categories I. *Journal of Pure and Applied Algebra* 153. 221–246; 157. 247–277; 166. 83–104.

Johnstone, Peter T. 1977. *Topos Theory*. London, Academic Press.

Lawvere, William F. 1964. An Elementary Theory of the Category of Sets. *Proc. National Acad. Sci. USA* 52. 1506–1511.

Lawvere, William F. 1969. Adjointness in Foundations. *Dialectica* 23.

Lawvere, William F. 1976. Variable Quantities and Variable Structures in Topoi. *Algebra, Topology and Category Theory, A Collection in Honor of Samuel Eilenberg*. Academic Press. 101–131.

Lawvere, William F. 2005. An Elementary Theory of the Category of Sets (Long Version) With Commentary. *Reprints in Theory and Applications of Categories* 11. 1–35.

McLarty, Colin 1993. Numbers Can Be Just What They Have To. *Nous* 27/4. 487–498.

Makkai Mihály 1995. First Order Logic with Dependent Sorts with Applications to Category Theory. <URL: http:\\math.mcgill.ca/makkai >, utolsó hozzáférés: 2013. november 28.

Makkai Mihály 1998. Towards a Categorical Foundation of Mathematics. In J. A. Makowski – E. V. Ravve (szerk.) *Logic Colloquium '95. Lecture Notes in Logic* 11. Springer-Verlag. 153–190.

Makkai Mihály 1999. On Structuralism in Mathematics. In R. Jackendoff és mások (szerk.) *Language, Logic and Concepts. Essays in Memory of John MacNamara*. Cambridge/MA, The MIT Press. 43–66.

Makkai Mihály 1999/2004. The Multitopic Omega-Category of All Multitopic Omega-Categories. <URL: http://math.mcgill.ca/makkai >, utolsó hozzáférés: 2013. november 28.

Makkai Mihály 2003. A New Foundation for Abstract Mathematics. Postings on June 22 and July 18. fom@cs.nyu.edu. <URL: http://math.mcgill.ca/makkai >, utolsó hozzáférés: 2013. november 28.

Makkai Mihály 2010. Notes (October 27). <URL: http://math.mcgill.ca/makkai >, utolsó hozzáférés: 2013. november 28.

Marquis, Jean-Pierre 2012. Categorical Foundations of Mathematics, or how to provide foundations for abstract mathematics. *The Review of Symbolic Logic*. 51–75.