

A gyermekek matematikai gondolkodásának megalapozása és fejlesztésének metodikája

Világszerte tudott, hogy számos kiváló matematikus került ki hazánkából, és sok külföldi érdeklődik matematikaoktatásunk módszere iránt. Ugyanakkor nincs olyan tantárgy, amely annyi nehézséget és kudarcot jelentene tanulóinknak, mint a matematika. Ennek az ellentmondásnak feltételezhető oka, hogy fogytékos a megalapozás a 2-7. életévekben; nem igazodik eléggé a gyerekek értelmi felfogóképességének, logikai-matematikai gondolkodásának fejlettségi szintjéhez, illetve hogy „kész műveleti sémákat” sajátíttatnak el ahelyett, hogy „kitaláltatnak” velük a számtani műveletek sikeres elvégzéséhez a kellő eljárás módokat. Az alábbiakban *J. Piaget és követői idevonatkozó kutatási eredményei alapján* mutatok rá, hogy a 2-7 éves gyermekek miként ismerkednek meg a számokkal, találják meg a számlálás és a számtani alpműveletek módjait, és fűzöm hozzá didaktikai javaslataimat.

Piaget és követői a kisgyermekek számfogalmának és matematikai gondolkodásának fejlődéséről

Jean Piaget – a XX. század legnagyobb gyermekpszichológusa – több művében foglalkozik a gyermek számfogalma és matematikai gondolkodása fejlődésével, és néhány pedagógiai munkája is megjelent, amelyekből számos, e téren is hasznosítható didaktikai elvet és pedagógiai ajánlást meríthetünk.¹

Századunk második felében *Piaget* egykori munkatársai, tanítványai és követői ismertették és tovább fejlesztették az ő alap kutatásait és elméletét. Eszerint a gyermekek matematikai gondolkodásának megalapozása a 2-7. életévekre esik. A halmazba sorolás az első tárgyakra, jelenségekre vonatkozó kijelentő mondatokban jelentkezik a második életév második felében; a számokkal ismerkedés és az első számnevek megtanulása a harmadik életévben; a halmazok mennyiségi egymáshoz viszonyítása, a számsoralkotás, a számlálás művelete a negyedik életévben. A csoport (halmaz) elemei, számbavételük a számosság szempontjából, a tő- és sorszámok értékük szerinti hierarchikus sorokba rendezése az ötödik életévtől; az egyszerű számtani alpműveletekhez vezető eljárás módok felfedezése és a felismerés, hogy az anyag – formai változása ellenére – azonos marad, a reverzibilis gondolkodás a hatodik életévben jelenik meg.

¹ *Piaget* műveiből kiemeltünk néhányat, amelyek a gyermek matematikai gondolkodás kialakulásáról és sajátosságairól szólnak. Alapműve, amelyre ma is sokan hivatkoznak mint kiindulási alagra a gyermek matematikai gondolkodását kutatók, a *Le genèse du nombre chez l'enfant* (1941), ami *Szemiaszko* közreműködésével végzett kutatásainak az összefoglalója. Ugyancsak 1941-ben jelent meg *B. Inhelder* munkatársával közösen közreadott műve, a *Le développement des quantités chez l'enfant*. A *La genèse mathématique* című munkája 1949-ben Bevezetés a genetikai ismeretelméletbe című sorozat I. köteteként jelent meg.

Piaget szinte minden lényeges sajátosságot feltárt a gyermekek számtani gondolkodása fejlődésében. Legfőbb megállapítása, hogy a matematikai gondolkodást a gyermek logikai gondolkodásának a kialakulása készíti elő és alapozza meg. Munkatársai és követői az ő makrogenetikum vizsgálatait elmélyítve finomabb mikroelemzéssel mutatták ki azokat az eljárás módokat, amelyek végül is a matematikai műveletek felfedezéséhez, illetve megértéséhez, a gyermek sikeres önálló munkájához és sajátos kidolgozásmódjához elvezetnek. A genfi egyetemen és a Rousseau Neveléstudományi Intézetben ma is jelentős kutatómunka folyik, európaiakon kívül amerikai kutatók is bekapcsolódtak e területen a pszichológiai vizsgálatokba.²

Piaget és iskolájának hatása a hazai matematikaoktatás metodikájára a hetvenes évektől jelentős. *Varga Tamás* (1977, 1979, 1989), *Dienes Zoltán* (1973) és mások művei hasznosították idevonatkozó gyermeklélektani kutatásainak eredményeit és a svájci „*école active*” metodikájának aktivizáló módszerét.³

A matematikai gondolkodás alapmegnyilvánulásai a kisgyermekkorban

A logikai jellegű gondolkodás a kisgyermekkorban – a szenzomotoros intelligencia megalapozó időszakát követően, úgy másfél éves kortól kezdődően – jelenik meg első formáiban, már a képzetekre és a kialakuló beszédre támaszkodva. Az első logikai-matematikai művelet a kijelentő mondatokban jelentkezik. Amikor egy gyermek rámutat egy mozgó lényre és azt mondja: „cica”, ezzel egy csoportba (matematikai nyelven halmazba) sorol be egy tárgyat, állítja, hogy az, amit cicaként ismer, egy tapasztalati együttesbe tartozó egyik elem, és nem más.

A gyermek kezdetben nagyon felületes észlelet, nagyon szubjektíve megállapított jellemzők alapján ítéli meg tárgyakat, jelenségeket, és sorol ugyanazon együttesbe, halmazba.

K. R. I. (1; 11, 20) közel két éves kislányom első ízben járván falun, egyik ház udvarán kotlóst lát csibével. Közülük néhány feléje szalad. A kisgyermek rám néz és mutat a csirkékre: Ni, ni! Én a kis állatot könnyen kiejelentő szóval „pipinek” nevezem. A kislány ismételtetve megtanulja a szót, majd hol a kotlóra, hol egy kacsára, hol egy bárányra mutatva mondja: „Pipi!” Felszínesen generalizál, határoz meg.

Előfordul egy másik változat is. *Piaget* közel ilyen korú gyermeke sétálás közben csigát lát, rámutatva megmondja nevét. Megállapításával látszólag helyesen, halmazba sorol kijelentő mondatával. Kiderül azonban, hogy később is újra és újra találkozva csigával, úgy véli, hogy „megint itt a csiga”. Ez esetben nem halmazba sorolásról lehet szó.

Viszont egy fejlettebb szinten levő gyermek az alábbi módon nyilatkozik.

Piaget kislánya, J. (2 éves 6 hónapos és 3 napos) meglát egy tányérrába szálló darazsat, s megállapítja: „Ez nem méh, ez darázs. Úgy-e ez vadállat?” – Ezzel már nemcsak a forma, a nagyság, szín stb. szerint, hanem egy lényeges tulajdonság alapján is (ez „vad” állat, hiszen szúr, ami fájdalmas) határozottan sorol egy halmazba. Egyidejűleg állít, és kiegészítő megerősítésként tagadja, hogy a látott rovar méh is lehet. Ez a gyermek eljutott az előfogalmak alkotásának a szintjére.

² Számos ilyen tárgyú művelekből kiemelem a következő munkákat: B. Inhelder és G. Cellier: *Le cheminement des découvertes de l'enfant* (Recherche sur les microgenèses cognitives), 1992; J. Bideaud-Ci. Mejjac-J. P. Fischer: *Les chemins du nombre*, 1991; R. Brissiaud: *Comment les enfants apprennent à calculer (au-delà de Piaget et de la théorie des ensembles)*, 1983; R. Gelman-C. R. Golliet: *The child's understanding of number*, 1978; P. Greco: *Une recherche sur la commutativité de l'addition*, 1962; C. Kamii: *Application of Piaget's theory to education*, 1981; C. Kamii: *Number in preschool and Kindergarten*, 1982; C. Kamii: *Les jeunes enfants reinvent l'arithmétique*, 1990.

³ Ez a hatás megmutatkozik a gyakorlatot segítő kézikönyvekben (mint például *Perlai Rezsőné* 1990-ben megjelent munkájában), valamint az óvodai nevelés programja (1989) matematikai útmutatójában, avagy a Nemzeti alaptanterv (1992) matematikai gondolkodást megalapozó ajánlásaiban is.

Míg az idézett gyermekek közül az első két kislány észlelése globális benyomás, melyben a sajátosságok megállapítása felszínes, szubjektív (a centralizáció szintje), illetve még nincs meg az azonos és lényeges jegyek alapján halmazba sorolás, addig a harmadik esetben már alaposabb analízis, megfigyelés és megfontolások alapján (több szempontú vizsgálódás, a decentralizáció szintjére közeledés) történt a halmazba sorolás, az észlelt egyednek mint e halmaz egyik elemének az elismerése a kijelentő mondatban.

Ha az óvodapedagógus a gyermekekkel való foglalkozásai folyamán megfigyeli minden gyermeknél, hogy e téren milyen fejlettségi szinten van, a gyermekek előrehaladását, egy következő magasabb szintre emelését könnyen megtervezheti. Találhat olyan foglalkozásokat, amelyek folyamán a gyermekek a rendelkezésükre bocsátott tárgyakból (például különböző színű fonalakból, gombokból, zsetonokból) álló halmazból – mind újabb és újabb tulajdonságok szerint – szétválogathatják egy vagy két szempontból (például szín, vékony-vastag, durva-finom tapintású stb.) a különböző halmazokat. Majd az így keletkező kis halmazokat egy újabb szempontból (számságuk, elemeik száma) egymással összehasonlíthatják, megkülönböztetik aszerint, hogy melyik kisebb, melyik azonos számságú vagy több. Ezzel a rendezés, viszonyítás matematikai-logikai eljárás módjai is gyakoroltathatók.

Az ilyen foglalatosságok beleillenek az általános értelmi fejlesztést szolgáló pedagógiai tevékenységbe, a megismerő, képzetalkotó, vizuális nevelőmunkába, az előfogalmak, gyűjtőfogalmak kialakításának folyamatába. A fő didaktikai elv, hogy a pedagógus ne „kész” ismereteket közöljön, hanem vonja be a gyermekeket az anyaggyűjtő, a vizsgálódó, feladatmegoldó tevékenységekbe, amelyek során összehasonlító-megkülönböztető, lényeges sajátosságokat kiemelő, meghatározó műveletekre is sor kerül. Eközben jutnak el a gyermekek a kezdeti szimbolikus, szinkretikus gondolkodás szintjéről a 4 éves kor táján a szemléletes, majd 6 éves kortól az intuitív, átmeneti korszakon át – a korábbi preoperatív, prekauzális korból – a konkrét műveleti gondolkodás szintjére.

Tulajdonságok szerint kategorizáló, szétválogató és halmazba soroló foglalkoztatás aktivizáló módszerrel

A gyermekeknek a második életévben megindult képzetalkotása a harmadik életévben mind részleteiben, mind tartalmi jegyeiben gazdagodik, fejlődik. Mégis, a logikai-matematikai gondolkodás fejlesztése érdekében szükség van az óvodába kerülő gyermekek vizuális nevelésére, képzetalkotó, előfogalmakba strukturáló képességeinek a fejlesztésére.

Az eléje egy halomba rakott hasonló és különböző tárgyak közül a gyermekek akkor tudnak sikeresen azonos jellegű, azonos nemű, sajátosságú elemeket egy halmazba gyűjteni, szétválogatással halmazokat alkotni, és azokat elemeik száma alapján egymáshoz viszonyítva egy számtani (hierarchikusan emelkedő) sorba rendezni, ha fejlett a megfigyelőképességük, és képesek tulajdonságokat megállapítani és megnevezni. Ezek a foglalkozások játékos jellegűek legyenek.

Az Óvodai Nevelés 1984. 6. számában és a Pszichológiától a pedagógiáig (1993) című könyv 165–166. lapjain olvasható *Páli Judit* idevonatkozó közleménye, amely ilyen jellegű és célú játékok pszichológiai alapjait és gondolkodásstratégiáit ismerteti. Ő 36 képből álló kártyalapsorozatot mutat be (készítője *Forgách Balázs*) a logikai-matematikai gondolkodás fejlesztése céljára. Vizsgálataiban egy 36 képből álló kártyasorozatot alkalmazott, amely a gyermektől nem a tetszése szerinti, bármiféle csoportosítást igényelte, hanem az egyszerűbb „illesztést” kívánta tőle. (Ez megfelel az óvodás korosztálynak.) A feladat a képek egy csoportjának a

kiválasztását és az általuk jelölt fogalom kitalálását igényelte a gyermektől. Egy csoportban hat kép képviselt egy fogalmat. Ilyen fogalmak voltak például: páros, bútor, gyümölcs, kerek. Az illesztéses keresés során a kísérletvezető kiemelt egy képet az összekevert és kirakott képsorozatból, és a gyermeknek ehhez kellett a kártyák halmazából azt az öt képet kiválasztania, amely szerinte egy csoportba illett. Így választott például a két bógrét ábrázoló képhez öt olyan kártyát, amelyek szintén párokat ábrázoltak: két babát, két egeret, két cipőt, két székét, két körtét.

„Minden választásukat – írja Páli Judit pszichológus – igennel és nemmel értékeltük, a kísérletben a fogalom körén kívül eső képeket félretettük, tehát az alakuló csoportban csak a valóban a fogalomhoz tartozó képek gyűltek össze. Így felesleges elemek jelenléte nem zavarhatta az óvodásokat és a kisiskolásokat a fogalomalkotásban. Minden kép választása után indokolniuk kellett, hogy minek alapján vélték a képeket összetartozóknak. Ezek a »hipotézisek« tartalmazták a fogalmi kategorizáció különböző formáit.”⁴

Napjainkban már számos játékszer, képeskönyv áll az óvodapedagógusok rendelkezésére (V. Binét Ágnes, B. Méhes Vera, Páli Judit és mások munkái), amik a 3–7 éves gyermekek logikai-matematikai gondolkodása kialakulását szolgáló gondolkoztató játékokat, rajzokat, képeket tartalmaznak.

Itt egy újabb, 1991-ben megjelent gyűjteményre és módszertani útmutatóra hívom fel olvasóim figyelmét, *Farkas Gyuláné* debreceni (Görgey utcai) óvónő „Óvodai matematikai módszer- és eszközgyűjtemény”-ére (kiadó Hajdú-Bihar Megyei Pedagógiai Intézet). Ez a kiadvány az 1989. évi Óvodai Nevelés Programjához igazodva, rendszerbe foglalva ismerteti azokat a logikai-matematikai gondolkodást kialakító és fejlesztő játékokat (eszközök és útmutató közlésével), amelyeket az általunk ajánlott *növendékeket aktivizáló* módszerrel sikeresen alkalmazni lehet.

Ezek a megfigyelő, elemző, összehasonlító, megkülönböztető, a lényeges tulajdonságokat kiemelő és ezek szerint szétválogató, halmazba, osztályba, gyűjtőfogalomba soroló műveletek az óvodában környezetismereti foglalkozások keretében is végeztethetők a gyermekekkel. Fogalmaztassuk is meg az ítéleteiket, felismeréseiket, meghatározásaikat, indokolásaikat, kis csoportban biztossítsuk, hogy mindenki kifejthesse véleményét, biztassuk őket, hogy rajzolják is le az egy csoportba gyűjtött elemeket, és karikáztassuk körül az egy halmazba tartozókat. Tudatosítsuk a szempontot, amely alapján egy osztályba sorolták őket. Ezt követheti a viszonyító műveletek alkalmazása, amikor is a számosság szempontjából számba vehetjük, hogy egy halmaz hány elemet foglal magában, és megkezdődhet a több, kevesebb, ugyanannyi viszonylatban a meghatározás és értékrend szerinti sorba rendezés.

Az óvodáskorú gyermekek viszonyító eljárásainak kialakítása és fejlesztése, a halmazok rangsorolása számosságuk szempontjából

Három és fél, négyéves kortól – a környezet hatására – kezd a gyerek érdeklődni a mennyiségi különbségek, a számosság és a számnevek iránt. Ha egy 4 éves, számolni nem tudó gyermek elé rakunk egy zsetont (gombot), s rámutatva mondjuk: „egy”, majd melléteszünk még egy zsetont, s mondjuk: „kettő”, és így folytatjuk tovább 5-ig, a gyermek – minket utánozva – hamar megtanulja a számneveket, de nem fogja fel fogalmi tartalmukat, a nevek jelentését. A kettő egy párt, a három már egy halmazt képez. A számosság szempontjából egy halmazt képező csoport

⁴ Óvodai Nevelés, 1984. 189–191. o.

értékét elemeinek száma határozza meg. Valami módot kell kitalálni, hogy a gyermek e kezdeti időszakban úgy tanulja meg a számneveket, hogy értsen is azokat, megtanulja, hogy egy számnév hány elemből álló halmaz képviselője. Ilyen módszer lehet egy-egy halmaz szemléltetésével egyidejűleg tanítani a számneveket. Megfelelő eljárás lehet, hogy miután egy zseton észlelésekor a gyermek már megtanulta az „egy” számnevet, még egy zsetont teszünk mellé, rámutatunk, és mondjuk: egy. Majd a második zsetonra ráhelyezünk még egy zsetont, s most mondjuk, hogy „kettő”. Így folytatva a sort, felépül a zsetonokból a tíz- és sorszámnevek sora, s a gyermek felfogja, hogy az „egy” után következő „kettő” mint második halmaz két elemből áll.

A számfogalom kialakulásának útja persze nem ilyen egyszerű a gyermekek értelmi fejlődésének folyamán. Végig kell járniuk a halmazok mennyiségi elemeinek számbavétele mellett a halmazok egymáshoz viszonyításának, és értékük szerinti hierarchikus rangsorba rendezése eljárás módjának, elsajátítása útját is. A számossághoz a halmazokba sorolt tárgyak konkrét tulajdonságaitól is el kell a gyermeknek vonatkoztatnia ahhoz, hogy a számosság szempontjából vegye számba egy halmaz alkotóelemeinek számát. Hogy ehhez hogyan jut el, ismerni kell, hogy a 3–5 éves gyermekek hogyan jutnak el maguk a számosság, illetve a számok fogalmához, miként találják ki az ehhez vezető eljárás módokat.

Déscoeudres (1921) írta le, hogy egy 4 éves gyermek – aki még csak az egy és a kettő számnevet ismerte – miként számlált meg három tárgyat. Amikor számba akarta venni az elébe került három tárgyat, ránézett az egyikre és felemelte a bal keze hüvelykujját, és számlált: „egy”, majd a másik tárgyra mutatva felmutatta a második, a mutatóujját, és mondta: „kettő”, majd a harmadikra fordítva tekintetét, felmutatta a harmadik, a középső ujját, és ezt mondta: „Ez több mint kettő, ez ennyi!”

Ez a tárgyat képviselő – és egyben emlékezetben tartani segítő – ujjfelmutató mnemotechnikai eljárás a számlálás segítőjeként sok más gyermeknél is megfigyelhető. Ebben az esetben a gyermek elvonatkoztat az ismert tárgy minden konkrét, észlelhető tulajdonságától, és csupán a számosság számbavétele szempontjából válik a tárgy értelmi felfogó tevékenysége tárgyává. Numerikusan akarja a halmaz elemeinek mennyiségét számba venni. Előzetesen már tudta, hogy az egy és a kettő számnév alkalmas e mennyiségi számbavétel megállapítására. Amikor azonban egy harmadik tárgyat is ilyen névképviselővel kívánt jelezni, már erre nem volt megfelelő számnév a szótárában. Azt viszont megállapította, hogy az észlelt csoportban, amire tekintete irányult, több tárgy van kettőnél, és tudatában volt annak is, hogy ez a többlet „egy” tárgy, vagyis eggyel kevesebb, mint kettő, és most így egy csoportban több van: több mint kettő. Ezt azonban számnév tudása híján csak az ujjával tudta jelezni. Ami gondolatmenetében lefolyt, magában foglalja tehát a *viszonyító eljárást*. Ebben a négyéves már gyakorlott. (Ha testvére anyjától több szem cukrot kap, azonnal észreveszi és szóvá teszi.) A viszonyítás itt azonban több mint szembecsléssel felmért „több”-nek az észlelése. Ez a gyermek, aki nemcsak ismeri az 1 és 2 számnevet, hanem annak fogalmi tartalmát is, a fenti példában a kettőt numerikusan $1+1=2$ -ként értelmezi, aminél +1-gyel több tárgy van a szeme előtt, s azt – a szám nevét nem ismerve, logikusan értelmezgetten – a felmutatott harmadik ujjával jelzi. Végül is úgy mutatva fel a három ujját, hogy azok együtt az észlelt tárgycsoport elemeinek számát képviselik, ahogy ki is fejezi a gyermek: „Ez ennyi!”

E négyévesnek a megnyilvánulása azt bizonyítja, hogy a gyermek saját tapasztalatai alapján és a felnőtt környezet hatására eljut egy szűk körben egy összetartozó együttes, a tárgyak halmaza elemeinek numerikus számbavétele

képességéhez, és ezt a számbavételt összehasonlító, megkülönböztető, viszonyító és meghatározó logikai műveletekkel végzi el.

A fenti esetet azért írtam le és elemeztem részletesen, hogy bemutassam, a 3-4 éves korban a gyermekek maguk is szükségét érzik a tárgyak számbavételének, s maguk is rájönnek egy bizonyos értelmi fejlettségi szinten a számlálás eljárás módjára, csupán a számnevek megtanítására van szükség. De a számnevek sorát, akár tizig, akár tovább, hiába „tanítják meg” nekik, ha egyidejűleg a gyermekek a számnév fogalmi tartalmát nem értik.

Nyolc zsetonból álló halmazt számoltattam meg a számneveket 10-ig ismerő 4 éves gyermekkel. A zsetonokra mutogatva mondta sorban a számokat. Amikor már minden zsetonra rámutatott, tovább mondta a számokat a már megszámláltakra mutogatva. A számlálás élvezetért számlált és nem a számbavétel szükségérzetétől ösztönözve.

A 3-4 évesek ilyenfajta spontán megnyilvánulásai arra ösztönözhetnek, hogy az erre a szintre elértekkel végeztethetünk különböző számú elemekből álló halmazok közt viszonyító műveleteket, és egyidejűleg a számnevek tanításával, segítsük azok fogalmát is kialakítani.

Ennek érdekében az óvodapedagógus összegyűjtethet egy halomba a játékpolicról mindenfajta játékszert az asztalra. Indítványozhatja az asztalt körülülő gyermekeknek, hogy mindenki – másoktól eltérő szempontból – válogassa ki az ugyanazon célra szolgáló játékeszközöket (avagy máskor közös egyeztetéssel más szempontból). A válogatást követően létrejött halmazok számosságuk alapján történő viszonyítási műveletekre kerülhet most sor. Ennek módját hadd találják ki a gyermekek. Minthogy tévedések lesznek, ha a gyermekek csupán szembecsléssel végzik az összehasonlítást és a megkülönböztetés és viszonyítás műveletét, javasoljuk a pontos számbavételt. A kiscsoport tagjai számára álljon rendelkezésre megfelelő mennyiségű zseton (habszem) és egy tárgy–egy zseton egyeztetéssel rakja ki minden gyermek maga elé sorba az így számlált tárgyak képviselőjét. Ezzel előrehalad az elvonás irányába. Ez az eljárás a gyermek figyelmét elvonja a tárgyak konkrét tulajdonságairól, s csak számosságuk szempontjából veszi őket figyelembe. Az elvonásban segít a közvetítő zseton is. A következő lépés a zsetonok numerikus elemekből álló sorainak összehasonlítása: melyik (halmaz) sorban van több, kevesebb, ugyanannyi? Ezt a „játékot” zárhatja az 1 elemből álló halmaztól a legtöbb elemből álló, émelkedő sorok egymás alá rendezése. Ez úgy történik, hogy mondják a gyermekek sorban a tőszámneveket, és egy gyermek kirak 1 zsetont, ez alá kerül a kettő kimondását követően 2, majd 3, majd X zseton egymásra rakva. Ez a mód szemléletessé teszi, hogy érték sorban minden számnévvel jelzett halmaz tárgyelemeinek száma az előzőleg felsorolt számok bennfoglalt összessége + 1. Tehát minden következő több az előzőknél eggyel, és van a többiekől eltérő saját neve.

E folyamatban a gyermekek aktív értelmi munkát végeznek, maguk végzik el a soron következő eljárás módját, és a számbavétel sikere a részt vevő gyermekeket ilyenfajta tevékenységekre ösztönzi. E műveletek begyakorlását követően bevezethető a dominóéglákon vagy dobókockákon található számképalakzatok számlálása, majd e tudásuk gyakoroltatása a kockadobásos társasjátékokban avagy dominójátékokban.

A számfogalmak intuitív felfogása, az értelmezett számokkal számlálás és a számtani alapműveletekre rátalálás az 5-6. életévekben

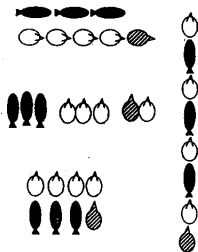
Négyéves korban a gyermekek többsége eljut az azonos nemű tárgyaknak, avagy az egy-két szempontból egy osztályba tartozóknak a kiválogatása, a logikai legkö-

zelebbi nembe sorolás (gyűjtőfogalom) eljárás módjainak a megtalálására és a néhány tárgyból álló halmaz numerikus számbavételére. És ez már logikai-matematikai gondolkodás.

B. Inhelder és J. Piaget Az elemi logikai struktúrák fejlődése című művében olvashatunk egy kislány (a 4 éves Kati) alábbi eljárás módjáról, amelyben a logika legközelebbi neme alá sorolta rendezte a rendelkezésére bocsátott tárgyakat.

Amikor elébe raktak egy halomban 8 műanyag állatfigurát: 4 fehér hattyút, 2 piros halat és 1 kacsát, azt mondta neki a felnőtt: „Játssz ezekkel úgy, ahogyan neked tetszik!”

Kati először a halakat rendezte egy sorba, majd alá sorba a madarakat: a négy hattyút és a sor végére a kacsát helyezte. (Ez a halak és a madarak gyűjtőfogalmába, avagy osztályba sorolásának logikai művelete.) – Ezt követően egy új szempontból rendezte az állatfigurákat. Egy sorba először a 3 halat, majd újból 3 hattyút – egy-egy csoportban –, s végül a kimaradt 1 hattyút és 1 kacsát párban helyezte el. (Ez számlálást igénylő eljárás.) – Majd újból a számosság szempontjából alkotott két sort: 4 hattyút egy sorban, majd alá a megmaradt 4 állatot: 3 halat, 1 kacsát egy (halmazt alkotó) sorban. Végül függőleges sorban egymás alá tett ritmikus változásban: 1 hattyút, 1 halat, 1 hattyút, 1 halat, 1 hattyút, 1 kacsát.



Amint látjuk, ez a 4 éves gyermek felnőtt utasítás nélkül, spontán módon, intuitív elvégezte a legközelebbi nembe, osztályba, gyűjtőfogalomba sorolást, a számosság szerinti soralkotást, a számlálást igénylő csoportba (halmazba) rendezést, valamint a viszonyítás és rendezés logikai-matematikai műveleteit.

Az *intuitív gondolkodás* átmenet az előző preoperatív (szimbolikus, szinkretikus, prekauzális, prelogikus) és az operatív (a konkrét műveleti) gondolkodás között.

Ma már *J. Piaget* és *A. Szeminszka* A gyermek számfogalma kialakulása (1941) című könyvéből ismert kísérlet, amelyben a kísérletvezető az óvodáskorú gyermek elé egy sorban 8 kék zsetont rak le sorba, és felszólítja a gyermeket, hogy alá, pontosan a mintához igazodva, rakjon ki ugyanannyi piros zsetont az elébe rakott halomból. Amikor ez sikerül, a felnőtt széthúzza a maga zsetonsorát, s megkérdezi, hogy most is ugyanannyi vagy több vagy kevesebb van-e nekem, mint neked? A 3–5 éves gyermekek szinte mindegyike azt állította, hogy a széthúzott sorban több van. Eszerint a kiterjedtség alapján szembeclással többnek vélték az egyik halmazt. Inkább a szemüknek hittek, mintsem megfontolták és az eszükre hallgattak volna. Ez jól mutatja, hogy még nem a halmazban levő egyedek összessége, számszerűen határoz meg egy mennyiséget.

A számok egyenként, a számnevekkel egyidejűleg fogalmi tartalmuk tudatosításával alakíthatók ki. Igen fontos, hogy a gyermek az első három számot úgy

tanulja meg, hogy értse ezek számneve fogalmi tartalmát, a bennfoglalt egységek mint a halmazt meghatározó elemek (számát) mennyiségét.

Brissiaud pszichológus (*Piaget* követője) saját fiánál figyelte meg, hogy miként alakul ki nála az első számok fogalma.

Fia, Julien már ismerte közel hároméves korában az 1 és a 2 számnevet, és helyesen használta. Julien 2 éves és 11 hónapos volt, amikor apja 3-ig szeretne volna megtanítani a fiát. Két zsetont helyezett a gyermek elé, aki megszámlálta: „egy”, „kettő”. Amikor 3 zsetont helyezett elé és megkérdezte: ez hány? Julien a bal kezén kezdte számolni, ujjait egyenként kinyújtva: „egy, kettő” – majd a 3-ik ujját is felnyújtva mondta: „Ez több mint kettő, ez ennyi!” (Korábban – amikor még nem tudta a „kettő” számnevet, ha 3 tárgyat tett az apja elébe, és felhívta, hogy számlálja meg, a gyermek mutatóujjával rámutatott az első tárgyra és mondta: „egy”, majd a másodikra, s újra egyet mondott, és a harmadikra is így mutatva, mondta újból: „egy”. Vagyis az egyet tudta mint számnevet használni, de három tárgyat egy halmazba fogva nem tudta azokat számmal kifejezni. (Azért sem, mert egy-egy tárgyra mutatva, azt 1-nek fogta fel.) A negyedik életévbe lépve Julien a tárgyakat a tárgyat képviselő ujjával vette számba, miután a számneveket is megtanulta az apjától 6-ig. Az 1-et mindig a bal keze hüvelykujjával mutatta, majd így számlált végig a bal keze ujjain, s amikor a 6-ra került a sor, a jobb keze hüvelykujját nyújtotta fel. Óvodába kerülve, ott 10-ig tanulta meg a számneveket. Minthogy az 1–6 számneveknek intuitív felfogása a fogalmi elemeit, a 7–10 számok értő tanulása könnyen ment. Amikor még apja tanította 6-ig számlálni, felfogta, hogy minden számnév mennyi számértéket képvisel. Ha apja kérdezte, hogy mennyi: 3, 5, 1, 6, 2, az ujjával mindig annyi ujját mutatott fel, amennyit a számnév képviselt és előhívott. Ezért, amikor a 7 szám fogalma felismerésre került sor, az apa Julientől, a már 10-ig a számjegyeket ismerő gyermekétől megkérdezte: „Mennyi hét?” A gyermek felmutatta (a már korábban begyakorolt módon) a bal keze 5 ujját és a jobb keze hüvelykujját, és ezt mondta: „7 az 6 meg 1”, és kinyújtotta az addig lezárt mutatóujját.

A számbavétel és a számfogalom kialakítása folyamatában a gyermek tudatlanul már összeadási alpműveletet is végez, amikor pedig észreveszi, hogy egy ismert halmazból hiányzik (mert valaki azt elvette) egy vagy több elem, felfogja, hogy ennyivel kevesebb lett a birtokolt tárgyak halmaza, és ezzel a kivonás műveletét alapoza meg. Ez már ugyancsak matematikai művelet: az összeadás, kivonás alpműveletéhez vezető *logikai-matematikai eljárásmod.*

Ha a gyermekek – mint Julien – elérték a logikai-matematikai gondolkodásnak erre a szintjére, lassan elhagyják a mnemotechnikai támasztékokat, az ujj közvetítő segédeszközét. Ebben az időszakban még különböző játékos foglalkozásokon és eszközökkel gyakorolják a tárgyi elemekből álló halmazok mennyiségi összehasonlító, megkülönböztető, számosságuk szerint a numerikus számbavétel eljárásmodjait, nagyságuk, térfogatuk, súlyuk, terjedelmük szempontjából összevetve őket. Megítélendő, hogy egymáshoz viszonyítva melyik több, kevesebb, nagyobb-kisebb, magasabb-alacsonyabb, vastagabb-vékonyabb, bővebb-szűkebb, keskenyebb-szélesebb stb.

E fejlettségi szintről az előrehaladás a gyermekek többségénél az ötödik életévbe lépés időszakában – a konkrét tárgyi halmazoktól az *elvont számfogalmak* irányába történik, és megkezdődik a *fogalmi (konceptuális) sémákra támaszkodó számlálás.*

A *számfogalom* – *Piaget* felfogása szerint – egy olyan totalitás (egység-egész), amelynek egy halmazon belüli elemei egyenértékűek. A számfogalom fő kritériuma: *a számnak a szemlélettel független, invariáns totalitásként felfogása.* Ez – az átmeneti intuitív gondolkodás szintjéről – a konkrét műveleti gondolkodás szintjére emelkedésnek az időszakában alakul ki, vagyis az 5–7. életévben bontakozik ki.

J. Piaget és *A. Szeminszka* A gyermek számfogalma kialakulása című idézett (1941) művükben a „folytonos” (folyadékok) és a „nem folytonos” (mint pl. a gyöngyök) mennyiségekkel végzett vizsgálataik alapján kimutatták, hogy a számfogalom kialakulása terén a *fejlődés 1. fokán* a 3–5 éves gyermekek felfogását a

mennyiségek invarianciájának teljes hiánya jellemzi. A 2-ik fokon – az 5-6. életévekben – a gyermeket az anyag formai változása (a gombóc ellapítva, lepényként, nagyobbak látszik) esetében első rátekintésre ugyan a szemlélt látvány megtéveszti, de némi megfontolás után (az áttöltött folyadék esetében pl. a szintmagasság változása mellett észreveszi a szélesség csökkenését a mintához képest) intuitíve felölik a kompenzáció gondolata: „a folyadékszint magassága ugyan emelkedett, de a vízoszlop szélessége keskenyebb”. E két ellentmondó felfogás azonban nem jut kiegyensúlyozáshoz, a gyermek nem kezd a kompenzáció végrehajtásához. Csak a 3-ik fokon – hat és fél, 7 éves kortól – jelenik meg a gyermekeknél a „reverzibilis gondolati művelet”, amikor is ilyen válaszokat kapunk: „ha nem vettek el belőle, s nem is tettek hozzá, akkor ugyanannyi kell maradjon” vagy „ha a keskeny pohárból visszatöltjük a szélesbe, akkor ugyanannyinak látszik”.

Az anyagmennyiség – minden formai változás ellenére – azonosnak maradása, az „invariancia” felismerésére a gyermek akkor jut, amikor a felszínes, egy szempontú megítélés módját felváltja a több szempontú, a több viszonylatban történő megfontolás. Másként kifejezve: amikor a centráció szintjéről a gyermek eljut a decentráció, több viszonylatban fontolgatás szintjére, és túlmegy az intuitív felismerésen. A fenti példák esetében – legalább két szempontból, illetve két viszonylatban mérlegel, és elvégzi a kompenzáció műveletét – kiváltódik a gyermekben a reverzibilis gondolkodás (amikor is a változott forma eredeti állapotára gondolatban visszatér, és rájön az azonosságra.) E szintre jutva – úgy hat éves korban – a szám fogalma (mind teljesebben) magában foglalja a számnévvel jelzett mennyiség numerikus lényeges jegyeit, az adott halmaz lényegi tartalmát és körét. Ezzel megindul a gyermeknél a helyesen értelmezett számlálás.

Az alábbiakban a számtani alpműveleteket megalapozó eljárásmodok kialakítását érintem egészen röviden.

Mihelyt a gyermek helyesen értelmezi a számnveket vagy tudja, hogy egy-egy számjegy hol áll a sorszámok hierarchikusan emelkedő értékrendjében és sorában, és egyben tudja, hogy egy számnév hány elemből álló halmaz képviselője, az egyszerűbbtől haladva a magasabb számú feladatok irányában, már öt-hat éves korban eljuthat az összeadás és kivonás alpműveletei kidolgozásához, értő alkalmazásához. Ha a gyermeket e műveletek végzésére előkészítő logikai eljárásmodok kialakulásának elősegítésével, aktivizáló módszer útján jól felkészítik, a hat év körüli gyermek problémamentesen illeszkedik be majd az iskola követelményrendszerébe, a beiskolázásra e téren is éretté válik.

A gyermekek matematikai gondolkodását megalapozó módszerek kidolgozásához segítő didaktikai elvek

A Bureau International d'Education (A nevelés nemzetközi irodája) az UNESCO 1956. évi közgyűlésének határozata alapján – Piaget előterjesztésében – az alábbi ajánlásokat tette az iskolák matematikát oktató pedagógusainak.

...20. Fontosnak tartjuk, hogy

a) A pedagógusok arra szoktassák tanítványaikat, hogy saját maguk alkossák a matematikai fogalmakat, maguk vizsgálják és ismerjék fel a számok közti mennyiségi viszonyokat és maguk dolgozzák ki a matematikai feladatmegoldó eljárásmodokat, műveleteket. A pedagógus ebben segítheti őket, de készen ne nyújtsa azokat.

b) Segítsék inkább növendékeiket a matematikai fogalmak és a matematikai gondolkodást megalapozó logikai műveletek kitalálásában, semhogy készen formális számtani-mértani megoldásmódokra tanítanak őket.

c) Ne közöljenek velük kész műveleti sémákat, ne vésessenek emlékezetükbe meg nem értett tételeket, képleteket, formulákat, megoldási sablonokat, és ne memorizáltassák azokat a készség fokáig.

21. Elengedhetetlenül szükséges, hogy

a) A tanulók előbb (kiindulásként) szerezzenek a konkrét tárgyi tényekről, a matematikai viszonylatokról vizsgálódás alapján tapasztalatokat, és csak ezt követően, ezekre támaszkodva aktivizálják a pedagógusok növendékeiket a fontolgatásokra, a megoldási módok kitalálására, logikai-matematikai okoskodásra, következtetésekre.

b) A tanulóknál (az adott feladathelyzetben elért fejlettségi szintjükhez igazodva) fokozatosan kell kialakítani a matematikai gondolkodást megalapozó és magasabb szintre emelő logikai műveleteket.

c) A tanulók maguk tanulják meg a problémákat felismerni, a tényeket és adatokat számba venni, felhasználni és a megoldásmódokat keresni, a kapott eredményt megfogalmazni, a megoldáshoz vezető utat feltárni, elmagyarázni.

d) A pedagógus a tanulókkal találta ki a megoldáshoz vezető logikai eljárás módokat, biztassa növendékeit vizsgálódásra, okoskodásra, a felismert problémák önálló megoldási stratégiája kidolgozására, semmint hogy kész mintákat, kész eljárás módokat közölne velük.

22. Az is szükséges, hogy a pedagógus

a) Minden esetben, amikor a tanuló hibát követett el, derítse fel, hogy miként jutott a tanuló a hibás megoldás gondolati eljárás módjához. Kérdezze ki tanítványát, hogy miként jutott e hibás eredményhez, mert ezeket megismerve, heurisztikus (szokratészi) módszerrel rávezetheti tanítványát a sikeres megoldásra.

b) Neveljen önellenőrzésre, a hibás eljárás mód önálló kijavítására, a célra vezető megoldási mód megtalálására.

c) Szoktassa tanítványait egy-egy problémahelyzetben az előzetes, hozzávetőleges becslésekre, számításokra.

d) Szoktassa növendékeit minden problémahelyzetben, minden feladat megoldását megelőzően a reflexióra (többoldalú és szempontú) fontolgatásokra, feltételezhetően sikerhez vezető megoldási módok alkalmazhatóságának a végiggondolására és elbírálására. (J. Piaget: Psychologie et Pédagogie. 1969. 69–70. b.)

A pedagógus minden foglalkozása előtt, gondolva a gyermekek életkori sajátosságaira, a soron következő téma területén a gyermekek előzetes tájékozottságára, valamint logikai-matematikai gondolkodásuk fejlettségi szintjére, válogassa össze a szükséges tárgyi eszközöket, tervezze meg a játékos tevékenységeket, aktivizáljon játékokat felvetésére, problémák megoldására, és játékformák végrehajtására. A pedagógus az adott helyzethez igazodva kreatívan alakítsa ki leghatékonyabb módszereit. Fontos, hogy a matematikai gondolkodást megalapozó foglalkozásokat játéknak tekintse a gyermek, és az felszabadult, derűs légkörben folyják. Sose mondja a pedagógus a gyermeknek, hogy megoldása hibás, nehogy a kudarcok elvegyék annak a kedvét, hanem egyénileg foglalkozva vele, segítse a jó eljárásmódhoz, a sikerhez vezető megoldáshoz.

- Bideaud, J.–Meljac, Cl.–Fischer J. P.*, (1991): Les chemins du nombre. Pr. Univ. de Lille.
- Brissiaud, Rémi* (1991): Un outil pour construire le nombre: les collections de doigts. In: *Bideaud, J.*: Les chemins du nombre. 59–90. o.
- Descodres, A.* (1921): Le développement de l'enfant de deux à sept ans. Neuchâtel.
- Farkas Gyuláné* (1991): Óvodai matematikai módszer és eszközgyűjtemény. Útmutató a matematikai munkalapok használatához. Hajdú-Bihar Megyei Pedagógiai Intézet, Debrecen.
- Gelman, R.–Gallistel, C. R.* (1978): The child's understanding of number. M. A. Harvard University, Cambridge Presse.
- Greco, P.* (1963): Une recherche sur la commutativité de l'addition. P. U. F., Paris.
- Inhelder, B.–Piaget J.* (1959): La genèse des structures logique élémentaires. Delachaud et Niestlé, Neuchâtel.
- Inhelder, B.–Cellerier, G.* (1992): Le cheminement des découvertes de l'enfant. (Recherche sur les microgenèses cognitives.) Delachaux et Niestlé, Neuchâtel–Paris.
- Kamii, C.* (1990): Les jeunes enfants reinvent l'arithmétique. Peter Lang, Bern–New York.
- Kamii, C.* (1982): *Number in preschool and Kindergarten.* Washington.
- Kiss Tihamér L.* (1943): A gyermek tárgy- és térszemlélete fejlődésének vizsgálata egyszerű geometriai testeken. Kolozsvári Tudományegyetem Neveléslélektani Intézete, Debrecen.
- Kiss Tihamér* (1992): Piaget didaktikai elveinek alkalmazása az óvodai nevelésben. Óvodai Nevelés, 9. sz. 294–296. o.
- Kiss Tihamér* (1992): A gyermekek értelmi fejlesztése az első hat életévben. Hajdú-Bihar Megyei Pedagógiai Intézet, Debrecen.
- Kiss Tihamér* (1993): Piaget, a pszichológus. Alex-typo, Budapest.
- Kiss Tihamér* (1994): Piaget a gyermekek kauzális gondolkodása kialakulásáról az első hat életévben. – Az oksági gondolkodás fejlesztése az óvodában. Piaget Alapítvány a MKM Közoktatásfejlesztési Alap támogatásával. Bp.
- Perlai Rezsőné* (1990): Matematikai nevelés – gondolkodásfejlesztés az óvodában. Magyar Pedagógiai Társaság. Kisgyermeknevelési Szakosztály. Bp.
- Piaget, Jean–Szeminszka, A.* (1941): La genèse du nombre chez l'enfant. Delachaud et Niestlé, Neuchâtel, Paris.
- Piaget, J.–Inhelder, B.* (1941): Le développement des quantités chez l'enfant. Delachaud et Niestlé, Neuchâtel, Paris.
- Piaget, J.* (1969): *Psychologie et Pédagogie.* Denoel–Gonthier, Paris.
- Varga Tamás* (1977): *Játsszunk matematikát.* Móra Kiadó, Bp.
- Varga Tamás* (1989): *Dienes professzor játéka.* Műszaki Könyvkiadó, Bp.