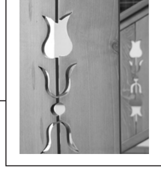

MOLNÁR ZOLTÁN GÁBOR

Milyen matematikát kell tanítanunk és azt hogyan?

Az egyetemi és a középiskolai matematikatanítás egységének problémájáról[1]

ÉRTELMEZÉSEK, VITÁK

1. BEVEZETÉS

A gazdasági, műszaki és természettudományos karok oktatói és hallgatói évről évre szembesülnek azzal, hogy a hallgatók a felsőoktatásban eleinte az elvárt és elfogadható szintnél sokkal gyengébben teljesítenek. Alighanem azért, mert az egyetem erősebb matematikai műveltséget vár el tőlük, mint amivel a középiskolából érkeznek. Nekünk, egyetemi oktatóknak ez komoly probléma, foglalkoznunk kell vele, törekednünk kell a két oktatási szint közötti kommunikáció erősítésére, pedagógiai kutatásokat kell kezdeményeznünk, hogy megoldást találjunk. Hiszen a hazai matematikai kultúra megőrzése, gondozása, továbbadása is ezt kívánja tőlünk.

törekednünk kell a két oktatási szint közötti kommunikáció erősítésére

Mint gyakorló középiskolai tanár és mint egyetemi oktató mindkét rendszert látom és ismerem. Délelőtt még átlagos középiskolás diákokkal együtt küzdök, hogy az érettségi követelmény nevű kásahegyen átrágjuk magunkat. Délután pedig már mérnökhallgatókkal dolgozzuk fel a különböző felsőbb matematikai témaköröket, és kíséreljük meg az abban foglaltakat megérteni, hogy kialakítsunk egy olyan problémamegoldó repertoárt, ami amellett, hogy alkalmazható a számonkérésekben felmerülő feladatok színvonalas megoldására, remélhetően adaptálható a természettudományos műveltséget igénylő területeken is.

A jelen írásban a következő kérdéseket vizsgálom:

1. Milyen kutatások voltak, zajlanak és terveződnek a hallgatói sikertelenség (az úgynevezett *elsőéves krízis*) problémájának felmérésére? Mit tehetnek az egyetemek, és mit tesz konkrétan a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egye-

[1] Készült az EFOP-3.4.4-16-2017-00025 kódszámú Bepillantás a jövődbe! Komplex műegyetemi pályaorientációs és továbbtanulást segítő programok felhívásra benyújtott pályázat keretein belül (BME). Köszönetemet szeretném kifejezni *dr. Lázi Mártá*nak a cikkel kapcsolatos hasznos észrevételeiért.

tem Matematika Intézete az elsőéves krízis mérséklésére?
2. Ha az elsőévesek másnak érzékelik az egyetemi és a középiskolai matematika *természetét* (nem a pedagógiai módszereit), akkor ennek mi lehet az oka?
3. Ha valóban van különbség a két szint matematikaképe között, akkor meg kell-e változtatni ezt az állapotot, meg lehet-e egyáltalán változtatni, és ha igen, milyen másfajta helyzetet kell, lehet létrehozni? Ha kell változtatni a helyzeten, akkor milyen stratégiával kell ehhez hozzákezdeni?

az írások megjelenése egy színvonalas pedagógiai diskurzus megindulását jelentheti

2. FRISS DISKURZUS A MATEMATIKA TANÍTÁSÁRÓL

Az utóbbi időben három nagyon fontos írás is megjelent, melyek a matematika tanításáról beszélnek. Közelebbről arról a problémáról, hogy a középiskolában éppen végzett diákok milyen nehézségekkel küzdenek az egyetemi matematikai képzés megkezdésekor, milyen okokra vezethetők vissza ezek a problémák, illetve hogyan lehetne ezeket a nehézségeket megelőzni vagy felkészülni rájuk.

Az írások megjelenése egy színvonalas pedagógiai diskurzus megindulását jelentheti. Ugyanis egyáltalán nem nyilvánvaló, hogy ilyen már létezik. Pedagógiai nyilvánosságunkban nem bevett gyakorlat a problémák rendszeres és eredménnyel járó megvitatása. Az *Új Pedagógiai Szemle* pedig helyet biztosított nemcsak egy cikknek, hanem a folyóiratban megjelent az ezzel vitatkozó válaszcikk is. Kevés azt mondani: kívánjuk, hogy folytatódjon a vita. Már elöljáróban felkérek minden, matematikát bármilyen szinten tanító kollégát, hogy csatlakozzon az alább részletezett cikkek által elindított közös gondolkodáshoz!

A három cikk közül az egyik, Radnóti Katalin és Nagy Mária *A matematika szerepe a természettudományos képzésben* című, az *Új Pedagógiai Szemlében* megjelent írása[2] többek között rávilágít arra a sokunk számára ismert jelenségre, hogy míg az általános és középfokú oktatásban a diákok a matematikát spirálisan, fokozatosan és az elmélyítésre viszonylag több időt (talán túl sok időt is?) hagyva sajátítják el, addig a felsőoktatásban hirtelen nagyon nagy mennyiségű ismeretet kell befogadniuk nagyon rövid idő alatt, miközben az iskola természetesen a megértést és adaptálást is elvárja tőlük. Sem a középiskola, sem a felsőfokú intézmény nincs felkészülve ennek a drasztikus ugrásnak a kezelésére. A fiatal júniusban sikerélményekkel telve elvégzi a középiskolát, szeptember közepén pedig már a teljes sikertelenséggel és önnön alkalmatlanságának érzésével kell birkóznia. (Később foglalkozom a cikk további állításaival.)

Az ELTE Radnóti Miklós Gyakorló Gimnáziumának matematika munkaközössége által írt *Vita a matematikaoktatás problémáiról egyetemi és középiskolai nézőpontból* című válaszcikk[3] elsősorban polemikus jellegű, és *Radnóti és Nagy* (2014) cikkére reagálva szembesíti a szerzőket néhány olyan ténnyel, melyeket bizonyára ők is nagyon jól ismernek. Így a külső kényszer problémájával, ami az óraszámokban

2 *Radnóti Katalin* és *Nagy Mária* (2014)
3 *ELTE Radnóti Gimnázium Matematika Munkaközössége* (2014)

és tananyagtartalmakban ölt testet, vagy a belső kényszerrel, a szakmai hagyományokkal és a napi szakmai tapasztalattal, melyek kétségessé teszik, hogy a változást, változtatást pusztán a középiskola oldalán meg lehessen kezdeni.[4]

A harmadik fent jelzett cikk a Bolyai Társulat *által nemrég* indított *Érintő* c. online matematikai portálon[5] jelent meg, amelynek pedagógiai rovata is van.[6] Horváth Eszter, a Kempelen Farkas Gimnázium vezetőtanára írta *Dolgozatírás a középiskola és a felsőoktatás határán* címmel.[7] Ebben a szerző két egyetemi kar (az ELTE TTK és a PPKE ITK) úgynevezett nulladik matematika zh-ját mutatja be, különös tekintettel és részletező figyelemmel a hallgatók által elkövetett típushibákra, kiemelve a hozott és elvárt tudás ellentétét. A nulladik matematika zh egy olyan mérés, amelyet egyes egyetemek a műszaki, a természettudományos és a gazdasági szakosok számára szerveznek azzal a céllal, hogy felmérjék, milyen tudásszinttel rendelkeznek a hallgatók az egyetemi tanulmányaik legelején matematikából. A cikk beszámol arról, hogy az eredmények nem túl jók – de ez majdnem evidencia. Ami meglepő (megdöbbentő), azok a diákok problémamegoldási módszerei.

milyen tudásszinttel rendelkeznek a hallgatók az egyetemi tanulmányaik legelején matematikából

A továbbiakban az említett cikkekben felmerülő néhány problémával foglalkozom: hogy miért azt tanítjuk a középiskolában, amit; hogy milyen természetű a matematikatudás; hogy milyen stratégiák állnak, állhatnak rendelkezésre ahhoz, hogy elkerüljük vagy csillapítsuk az egyetemre kerülés utáni jól ismert elsőéves krízist. A leginkább húsba vágó kérdés mindezek közül az utolsó, ezért ezzel kezdem.

3. LÉPÉSEK AZ ELSŐÉVES KRÍZIS LEGYŐZÉSÉRE

A Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetemen 2010 óta rendezzük meg a nulladik matematika zh-t, és már tíz éve gondolkodunk arról, hogy felmérjük és kezeljük a hallgatók (fenti cikkekből is kirajzolódó) nehézségeit. Egy felsőoktatási intézmény nehéz helyzetben van. Két malomkő között őrlődik: felelősséget kell vállalnia a magyar tudomány, a kutatás és fejlesztés színvonalának fenntartásáért és emeléséért, mindamellett felelősséget kell vállalnia a magyar fiatalság minél szélesebb körének műveléséért is. Az egyetemnek fel kell vállalnia, hogy a tudást egyre szélesebb körben terjeszti, de ez a munka nem érhet célt, ha maga az egyetem egyben nem nagyon magas szintű kutatóhely is. Ha körültekintünk, azt látjuk, hogy az egyetemek egyrészt nagyon sokat tesznek azért, hogy a diákok kedvet kapjanak a tudománnyal való foglalkozáshoz, másrészt a felzárkóztatás is szerepel az oktatási stratégiájukban. A motiváltság kétségkívül előfeltétele és motorja a későbbi jó tudományos munká-

4 A szerző által ebben az írásban szemlézetteken kívül (lásd a fenti két lábjegyzet) a vitához tartozik az *Új Pedagógiai Szemle* 2014/7–8. számában megjelent *Vita a matematikaoktatás problémáiról egyetemi és középiskolai nézőpontból – Az igazság odaát van* című válaszcikk is *Szmerka Gergely*től. (A szerk.)

5 http://www.ematlap.hu/

6 A rovat leírása szerint: „Sokszor találkozunk olyan feladattal, ötlettel, amit szívesen elteszünk későbbi használatra. A *TANÓRA – SZAKKÖR* rovat szeretne hozzájárulni a matematikatanárok eszköztárának gazdagításához, fórumot kíván adni a gondok, nehézségek megtárgyalására is (rovatszerkesztő: HORVÁTH ESZTER)”.

7 *Horváth* (2016)

nak. Kiemelném például az ELTE TTK *Atomoktól a csillagokig* című, fizikát és határterületeit népszerűsítő előadássorozatát, mely már tizenhárom éve várja az érdeklődő középiskolásokat, megszerettetve velük a tudományt és a technikát.[8] De azt a gondos munkát is ki kell emelnem, amely a PPKE ITK-n zajlik, ahol nulladik zh-kra felkészítő tanfolyamokat tartanak, és az eredmények alapján több tantárgyból biztosítják a nívócsoportos oktatást, hogy az érintett hallgatónak lehetősége legyen felzárkózni az egyetemi tanulmányai alatt. Ezt a módszert alkalmazta a BME is korábban egy kísérleti programban, ahol nívócsoportos oktatásban zajlott a vegyészhallgatók matematikaoktatása.

A BME évről évre szemügyre veszi az elsőéves hallgatók matematikai műveltségének szintjét, és a megfelelő színvonal biztosítása, illetve a tudásszint emelése céljából olyan programokat indít, amelyek vagy közelebb viszik az általános és középiskolásokat az egyetemi szinthez, vagy ha már ott vannak, segítenek az egyetemre való felkészülésben. Az egyetemi nyílt napok, a kutatók éjszakája, a *BME Gyerekegyetem*, a *BME Science Camp*, a *Fizikus Mikulás* és sok hasonló rendezvény megteremti a lehetőségét annak, hogy a középiskolás diákokat életük egy alkalmas pontján elkapja a tudomány szeretete, és időben felkapaszkodhassanak az egyetem felé döcögő Molitorisz-kocsira.[9] Az alábbiakban a különböző kezdeményezéseinket részletezem:

a középiskolás diákokat életük egy alkalmas pontján elkapja a tudomány szeretete

- A *Gyerekegyetem* általános iskolásokat vár, szeretteti meg velük a tudományt, pici kutatómunkára is ösztönzi őket, és szimbolikus diplomát is kapnak. Mindezt a nyári szünetben, amikor azt gondolnánk, hogy az unalmas tankönyveket a gyerekek már rég a sutba vágták.[10]
- A *Science Camp* kifejezetten a természettudományos kutatás iránt érdeklődő középiskolásokat várja témákkal, kutatóhelyek látogatásával és a tudomány művelőivel való megismerkedéssel.[11]
- A *Bevezető matematika* kurzusok olyan hallgatók számára ajánlottak, akik elvéreztek a BME nulladik matematika zárthelyijén. Ezeket az órákat elsősorban válogatott középiskolai tanárok tartják, akik sokéves tapasztalatukat vetik latba, hogy felzárkóztassák azokat, akik nem érik el a kívánt egyetemi matematikai tudásszintet. A kurzusok anyagai (megoldásokkal együtt) nyilvánosak.[12]
- A *BME Alfa* online gyakorlófelület szintén abban segít, hogy akár az egyetem elkezdése előtt, akár a későbbiekben a nulladik zh feladataihoz hasonlókat gyakorolhassanak a diákok, hallgatók. Nemcsak matematikából, hanem emellett fizikából is.[13]
- A *BME Alfa Matematikaverseny* szintén a középiskolásokat célozza meg. Nem csak

[8] http://www.atomcsill.elte.hu/archivum
[9] Utalás Mikszáth Kálmán *A fekete város* című regényére (A szerk.)
[10] http://gyerekegyetem.bme.hu/
[11] http://sciencecamp.ttk.bme.hu/
[12] http://math.bme.hu/bevezeto-matematika
[13] https://alfa.bme.hu/

versenyszinten. Nem várhatjuk a sikeresség növekedését attól, hogy mindenkit versenyeztetünk. Olyan kategóriát is meghirdettünk, amely a középszintű matematika érettségi szintjét célozza meg. Tematikusan végigveszi az érettségi témaköröket, a feladatokat pedig online, adott időkeretben kell megoldaniuk a résztvevőknek. A verseny ezen kategóriájában sikerélményhez szeretnénk juttatni a diákokat, ezért valóban nem kérdezünk nehezebb anyagot, mint ami a középszintű érettségin várható, azaz bárki részesülhet a sikeres feladatmegoldás örömében. Az online kitöltés előnye, hogy a versenybe határon túli diákok is bekapcsolódhatnak.[14] A versenypéldákat részletes megoldással közzé szeretnénk tenni a jövőben.

bárki részesülhet a sikeres feladatmegoldás örömében

- Mind a nyári előkészítő részben, mind a matematikai alapozó tárgyaknál eredményes kutatásokat végez és ezeket sikeresen alkalmazza a gyakorlatban *Szilágyi Brigitta*, a BME docense és munkaközössége. Ők egy (a *BME Alfától* eltérő) speciálisan létrehozott online felületen gyakoroltatják a hallgatókat, akár a nulladik zh-ra, akár más vizsgákra. Ezeket az online eszközöket évek óta bevonják a vizsgáztatásba is, ezzel egyértelműen gyorsabb és statisztikailag jobban áttekinthető számonkérést működtetve. Eredményeiket több helyen publikálták, lásd például *Bakonyvári* és *Szilágyi* (2017).

Ezekben a kezdeményezésekben nagyon sok kollégánk dolgozik, felsorolni is nehéz lenne őket.[15] A *BME Alfa Matematikaverseny* különösen nagy büszkeségünk, erről az *Érintő* oldalán is beszámoltunk.[16] A BME MI fizetős nyári felzárkóztató képzést is felajánl; ez a *KecsUp program.*[17] Ennek a képzésnek már régebben is gerincét képezte az online technológiák használata, pl. a *BME Alfa* lehetőségeinek kiaknázása. Az ezekben a programokban részt vevő hallgatók utánkövetésére szintén törekszik az egyetem, de ez már sokkal könnyebb feladat, hiszen a tehetséggondozásnak már bevett formái vannak az egyetem falain belül.[18] Ami új ezekben a kezdeményezésekben, hogy arra a problémára próbálnak reagálni, amiről a fent említett cikkek szólnak. Természetesen nem gondoljuk, hogy ezzel megoldottuk a problémát, azt azonban állíthatjuk, hogy a Műegyetem intenzíven dolgozik olyan programok kidolgozásán, amelyeknek a gyengébb előképzettségű hallgatók felzárkóztatása és lemorzsolódásuk visszaszorítása a célja.

Korábbi törekvések és mérések

Az elsőéves BSc hallgatók tudásszintje előzetes felmérésének ötlete először 2008-ban vetődött fel. A kezdeményezők, Pipek János[19] és a már említett Radnóti Katalin[20]

[14] BME Alfa Online Matematikaverseny: http://www.ttk.bme.hu/node/2802

[15] A teljesség igénye nélkül: a tevékenység motorja dr. Lázi Márta BME docens, az informatikai hátteret *Gergi Miklós* (BME MI), *Rácz Éva* matematikatanár és *dr. Ruppert László* matematikus biztosítja, a szakmai anyagok, előadások létrejöttével kapcsolatban *Nagy Ilona, dr. Tasnádi Tamás, Molnár Zoltán Gábor* és korábbról *dr. Kádasné V. Nagy Éva* (docens, BME) és *dr. Szilágyi Brigitta* (docens, BME) neve feltétlenül megemlítendő.

[16] *Lángné Lázi Márta*, *Molnár Zoltán Gábor* és *Nagy Ilona* (2017)

[17] A programot korábban Dr. Szilágyi Brigitta, mostanában pedig Dr. Lázi Márta és *Molontay Roland* (BME MI, PhD hallgató) koordinálja.

[18] *Szilágyi* (2017)

[19] Oktatási dékánhelyettes, BME Elméleti Fizikai Tanszék

[20] Tanár, ELTE Anyagfizikai Tanszék

az elsőéves BME és ELTE fizikushallgatók, valamint a BME mérnökhallgatók felmérőjéről be is számolt a *Fizikai Szemle* 2009. márciusi számában.[21] 2010-től a BME Matematikai Intézet csaknem az összes, a BME-n matematikát hallgató elsőévessel megíratta a matematika „nulladik” zh-t. Az eredményekről és tanulságokról az akkori szervező, *Csákány Anikó* 2013-es írásából értesülhetünk, de ezt a rendszeres év eleji mérést Csákány Anikó korábbi publikációi is bemutatják.[22]

A fizika felmérőről íródott *Pipek és Radnóti* (2009) elemzés két nagyon lényeges és megdöbbentő tényre mutat rá. Az egyik, hogy a jeles középszintű érettségi osztályzat, amely az érettségi vizsgán 80%-nál magasabb eredményt jelent, a felmérő dolgozatban csak kevesebb mint 50%-os eredményességgel jár együtt. Ez baj, mert a felsőoktatásban a hallgatók az elégséges szintet általában 40%-nál nagyobb eredménnyel teljesíthetik (vagyis a középiskolai jeles a felsőoktatásban alig jobb mint elégséges szintre predesztinál). A másik lényeges megállapítás, hogy a *magas* felvételi pontszám egyáltalán nem függ össze a felmérő eredményességével. Egyáltalán nem jósolható meg, hogy egy magas felvételi pontszámmal felvett hallgató milyen eredményt ér el a felmérő dolgozatban. Az alacsony pontszámmal felvett hallgatók azonban statisztikailag kimutathatóan alacsony eredményességűek lesznek a „nulladik” felmérőn, és az is egyértelműen kiderül az adatokból, hogy a versenyeken induló, vagy az emelt szintű érettségit vállaló hallgatók eredményessége jobb lesz.

a magas felvételi pontszám egyáltalán nem függ össze a felmérő eredményességével

Csákány (2013) adatai szerint a „nulladik” teszt elégséges szintjét a hallgatók nagyjából fele nem képes elérni, azaz elégtelen matematikatudással érkezik a felsőoktatásba, noha felvételt nyert a Műegyetemre, ami önmagában értékelendő eredmény lenne. Nagyjából ma is így állunk. A Műegyetem éppen azért indította el a Bevezető matematika kurzusokat, hogy a felzárkóztatásra lehetőséget adjon, és ezzel a matematikatudás hiányára visszavezethető lemorzsolódást mérsékelje.

Jelenlegi BME-s kutatások a témában

A hallgatók tanulmányi sikerességének kutatása jelenleg egy egész egyetemre kiterjedő programban valósul meg.[23] Az egyik témában a hallgatók azt dolgozzák föl, hogy a tárgyak egymásra épülése hogyan modellezhető matematikailag, illetve (a *Neptun*, a tanulmányi adminisztrációs rendszer adatai alapján) ezek a tárgyak hogyan befolyásolják a továbbhaladás esélyét. Megdöbbentő, hogy az adatokból transzparensen követhetővé válik mindaz, amit egyébként az egyetemen a folyosói pletykákból tudhatunk meg az egyes tárgyak nehézségéről, hallgatókat terhelő hatásáról. A rendszer még a finomítás fázisában van, de alkalmas lesz arra, hogy a továbbhala-

21 *Pipek* és *Radnóti*, 2009.

22 *Csákány*, 2013; *Csákány* és *Pipek*, 2010.

23 A kutatást *Szabó Mihály*, a BME Központi Tanulmányi Hivatalának (KTH) igazgatója és Molontay Roland a Matematikai Intézet (MI) Sztochasztika Tanszékének doktori hallgatója vezeti matematikus hallgatók bevonásával.

dás nehézségeit akármilyen egyetemi tantervi háló esetén modellezze, természetesen megfelelő előzetes adatok alapján.

A másik kutatás szintén a *Neptun* adatai alapján méri föl a tanulmányi eredményesség és a szociális helyzet összefüggéseit. Az adatkezelési szabályok szigorú figyelembevétele mellett a Műegyetem hatalmas mintájában vizsgálják a témát választó tudományos diákköri munkát végző hallgatók mindazokat az összefüggéseket, melyek a *Radnóti* és *Pipek* (2009), illetve *Csákány* (2013) által vizsgált esetekben csak egy-egy évre, egy-egy mérésre korlátozódtak. Szeretném hangsúlyozni, hogy ezek a kutatások nem csak egy korrelációszámításból állnak. A hallgatók mai adatbányászati módszereket és csak erre a munkára kifejlesztett számítási modelleket használnak az adatok feldolgozásához. A még folyamatban lévő munka eredményeitől a KTH és az MI[24] kutatói nagyon sokat várnak, azt remélik, hogy az egyetemek ezekkel az ismeretekkel felfegyverkezve sokkal hatékonyabban fogják tudni segíteni a hallgatóikat a felzárkóztatásban és a sikeres továbbhaladás előmozdításában.

a Neptun adatai alapján méri föl a tanulmányi eredményesség és a szociális helyzet összefüggéseit

4. MI A MATEMATIKA TERMÉSZETE, ÉS MIÉRT AZ A MATEMATIKA-TANANYAG, AMI?

Most rátérek arra a kérdésre, hogy milyen jellegű, milyen természetű a vizsgálódásaink középpontjában álló matematika. Félek, hogy szem elől tévesztettük, hogy mit tudunk a matematikáról, és olyan közkeletű, de naiv elképzeléseknek adtuk meg magunkat, amelyek a matematikát túlságosan egyszerű módon tüntetik föl. A matematika organon (eszköz) jellege és platonista felfogása ellen fogok érvelni, de ezzel egyáltalán nem azt akarom mondani, hogy a matematika külső alkalmazásai ne lennének fontosak, vagy hogy realista felfogása ne adna hozzá ahhoz a megértéshez, ami a matematika mibenlétének feltárásához szükséges. Csak azt mondom, hogy ezek a naiv elképzelések *önmagukban* hiányos, elégtelen képet mutatnak a matematikáról és a pedagógiai gyakorlatot illetően helytelen következtetésekre adnak lehetőséget.

A matematika emberi tudomány

A matematikai gondolkodásmód nem emberidegen, száraz, rideg, gépies valami. Talán a humán/reál szembeállítás miatt gondolják nagyon sokan, hogy a matematika nemcsak hogy nem humán tudomány, hanem olyan, amiben nem lelhető fel az érzés, a szubjektum, az emberi cselekvő. Ez természetesen egyáltalán nem igaz. *Tóth Imre,* közismert Bolyai-kutató elég vehemensen érvelt amellett, hogy a matematika igenis emberi tevékenység, és mindaz, amit fentebb emberiként felsoroltunk, jellemzi azt.[25] A továbbiakban egy másik nézőpontból közelíteném meg a matematika természetének problémáját.

[24] BME Központi Tanulmányi Hivatal (KTH), Matematikai Intézet (MI).
[25] *Tóth* (2010)

A matematikai módszerek a gondolkodásnak mint emberi tevékenységnek ugyanúgy legitim részét képezik, mint bármilyen más gondolkodási tevékenység. Igaz ugyan, hogy létezik velük kapcsolatban a „hibátlan kristálypalota" kép: az az elképzelés, hogy a matematika már készen van, a formái tőlünk függetlenül adottak, s mi ezekre a formákra tekintünk rá, ezeket fedezzük fel; emberi cselekvőként csak a szabályoknak való passzív engedelmesség a dolgunk. Ez a kép azonban nem az egyedüli lehetőség a matematika bemutatására, és ráadásul a mindennapi matematikusi gyakorlat nagy részére nem is igaz. Azok számára, akik nem foglalkoznak matematikával, például csak tanítják, de nem művelik, ez a „kristálypalota" kép csalogató lehet, ám a legtöbb esetben semmi máson nem alapul, mint azon, hogy van egy tananyag (ez lenne az objektív építmény), és azt kell megtanítani. Aki azonban nem így áll a matematikához, az ugyanolyan élvezetesen tudja azt a többiek elé tárni, mint a történelmet vagy az irodalmat.

ez a „kristálypalota" kép csalogató lehet

Sajnos a szakmán kívüliek elsöprő többsége osztja azt a képzetet, hogy a matematika „száraz", szemben az irodalommal és a történelemmel, ami ezek szerint… „szaftos". Nos, ez nemcsak hamis kép, hanem kifejezetten káros is. *Komoróczy Géza* hívta föl a figyelmet arra a tényre, hogy a történészhallgatók agyából az első években teljességgel törölni kell a középiskolai gondolkodásmódot, hogy elkezdhessék a történettudomány valódi módszertanát tanulni.[26] Hangsúlyozom: a neves történész szerint törölni kell a történészhallgatók középiskolai beidegződéseit ahhoz, hogy elkezdhessék a lényegi kutatómunkát. Igen, élhet az a kép az emberben, hogy a történelem nagy csatákról, férfias helytállásról, női fondorlatokról, lelkes kiállásokról, értékekről, érzelmekről szól, csak ez a kép teljességgel szakmaiatlan. Ha felvetődik annak a kérdése, hogy ki volt Koppány, akkor a történettudomány a válaszadáskor nem hagyatkozhat a nemzeti önsorsrontás elkerülésének delejes és tomboló érzelmi viharára. A racionális gondolkodás emberi termék és emberi tevékenység.

Az osztályozó, következtető, mérlegelő, rendszeres gondolkodás ugyanúgy a mindennapjaink része és ugyanúgy nem élhetünk nélküle, mint az érzelmeink nélkül. A matematika ugyanúgy az emberi gondolkodás terepe, mint az irodalom, amelyet sokszor úgy közlítünk meg (többek közt irodalomórán), hogy megnézzük, az irodalmi szöveg kit szólít meg, ki a beszélő, milyen eszközöket használ stb. Ezek is ugyanúgy a racionális gondolkodás világába tartoznak, mint az, hogy a hatszögnek hány átlója van, ezek közül mely párok párhuzamosak és melyek metszők stb. Ahogy a nemzetközileg is elismert matematikatörténész, *Szabó Árpád* kimutatta: az egységes matematika mint önálló tudomány nem mással kezdődött, mint a vitapartner meggyőzésének igényéből származó érvelési gyakorlattal.[27] Az éleai filozófiai iskola számára a síkbeli alakzatok és a számszerű mennyiségek világa tűnt a legjobb gyakorlóterepnek a vitatkozás tudományának gyakorlására. A matematikát nem a tárgya, azaz nem a geometriai formák és a számszerű mennyiségek vizsgálata különíti el a többi tudománytól, hanem a módszere. Ha ugyanis a tárgya volna a meghatározó, akkor az

[26] *Mihancsik* (2002)
[27] *Szabó* (1998)

építészet és az informatika is a matematika része volna, pedig világos, hogy egyik sem az. A matematika érvelő tudomány és az érvelés az alapvető sajátossága, ami viszont ugyanúgy emberi tevékenység, mint az építés vagy a számolás vagy a kreatív nyelvhasználat.

Ez a szemlélet természetesen eltér attól a közkeletű nézettől, hogy a matematikai tételek a természetben megtalálható mennyiségi szabályosságok formális megnyilvánulásai, és a matematika tárgyai az ezen szabályosságokban szereplő tárgyak absztrakciói. Az utóbbi matematikaképet *Kalmár László* világhírű matematikai logikus is propagálta,[28] de tudni kell, hogy ez a platonista vagy realista álláspont egyáltalán nem kizárólagos nézet, és még csak nem is uralkodó idea a matematika filozófiájában. A platonista álláspont elég keményen kritizálható, és még csak a természetes számokra vonatkozóan sem áll biztosan. *William W. Tait* funkcionalista és *Paul Benacerraf* strukturalista matematikafilozófusok elég jól körüljárták azt, hogy mi a baj a realista nézettel.[29] Ennek ellenére egyáltalán nem elvetendő a kalmári platonizmus, már csak azért sem, mert maga *Kurt Gödel* is erre az álláspontra helyezkedett.[30]

az egységes matematika mint önálló tudomány nem mással kezdődött, mint a vitapartner meggyőzésének igényéből származó érvelési gyakorlattal

Az, hogy a matematika elsősorban nyelvi tevékenység és a szabályait a nyelvközösség alkotja meg, nem áll ellentmondásban azzal, hogy a matematika nagyon jól alkalmazható a technikában és a természettudományban. Voltaképpen arról van szó, hogy a „matematikául beszélők" közössége a matematikai *tárgyakról*, legegyszerűbb esetben a számokról és a geometriai formákról beszél, ezért a matematika – egy bizonyos szintig – nem válik el attól a valóságtól, amiről megállapításokat tesz, hanem állandó kapcsolatban van vele, és a diskurzus ezekről a tárgyakról folyik.[31] Normatív, de elsősorban tudománytalan azt állítani, hogy csak az alkalmazások adják meg az igazi matematika értékét, hiszen egyáltalán nem tudjuk, hogy egy, az alkalmazásokhoz egyáltalán nem kapcsolódó matematikai témakörnek a jövőben milyen alkalmazásai lehetnek. És valóban számos esetben előfordult, hogy egy eredetileg nem alkalmazásmotivált matematikai eredmény alkalmazásra talált.

A középiskolai matematika tantárgy tananyaga

Hogy pontosan miért azt tanuljuk matematikából, amit, annak hozzávetőlegesen ugyanaz az oka, mint hogy irodalomból miért azt tanuljuk, amit épp tanulunk. Nyilvánvaló, hogy az *Íliász* vagy a *Biblia* ismerete – legalább annyira, hogy képben legyünk – elengedhetetlen, és ahhoz is nagyon lényeges, hogy helyünket a társadalomban felmérjük, felismerjük, megértsük. *Íliász* és *Biblia* nélkül nincs európai kultúra. Ugyanezért Thalész, Eukleidész és Apollóniosz nélkül sincs európai kultúra. 2300 éve rajzolgatnak a gyerekek körzővel és vonalzóval szögfelezőt és rendezgetik a kavicsokat négyzet vagy háromszög alakba. Ha ezt nem folytatnánk, 2300 év kul-

28 *Kalmár* (1957)
29 *Tait* (1981); *Benacerraf* (1965)
30 *Gödel* (1952)
31 *Dummett* (2000)

túrája merülne feledésbe. Sajnos alig van olyan általános iskolai tanár, aki eljuttatja a gyerekekhez ezt az üzenetet: ugyanazért tanuljuk, hogy a háromszögben a nagyobb szöggel szemben a hosszabb oldal van, mint amiért azt tanuljuk, hogy Thétisz Akhilleuszt a sarkánál fogva mártotta a Sztüx vizébe (és hogy ezért van, hogy Brad Pittet olyan ügyesen le tudta győzni Orlando Bloom a megfelelő filmben).[32]

Mi az a megközelítés, amit Eukleidésztől tanulunk? Az, hogy nemcsak konkrét geometriai alakzatokra vonatkozó kérdések válaszolhatók meg, hanem hogy bizonyos problémakörökre egységes és teljes válaszokat tudunk adni. Nemcsak a 3, 4, 5 egység oldalú háromszögre igaz, hogy a két kisebb oldal hosszának a négyzetösszege egyenlő a leghosszabb oldal hosszának négyzetével, hanem *minden* derékszögű háromszögre igaz ez az összefüggés. A mérnök (építész, gépész) bőven megelégedne azzal, ha az adott esetben felmerülő konkrét háromszögre igaz lenne ez az összefüggés. Kísérletileg, sok esetre ellenőrizné és induktíve eljutna oda, hogy fennáll ez az összefüggés. A tételekkel kapcsolatban a matematika ennél jóval többet akar és messzebbre is jut. Pusztán szavak csűrésével-csavarásával ki tudja hozni, hogy *minden* derékszögű háromszögben igaz a szóban forgó összefüggés. (És ezért megtalálható, gondolatilag felfejthető az érvelésében az az előfeltevés, ami miatt a görbe térben – amilyen a valóságos tér – már nem igaz a tétel. Ezek az előfeltételek az axiómákban öltenek testet.)

pusztán szavak csűrésével-csavarásával ki tudja hozni, hogy minden derékszögű háromszögben igaz a szóban forgó összefüggés

Természetesen, ahogy a matematikai tudás maga is bővül, úgy a matematikai módszerek is bővülnek. A geometriai problémák megoldására már nem csak az elemi módszereket ismerjük. *Felix Klein* erlangeni programja, vagyis a geometria algebrizálása rendkívül sikeres megközelítésnek bizonyult. Ki ne emlékezne arra a definícióra, hogy „két alakzat egybevágó, ha van olyan egybevágósági transzformáció, mely az egyiket a másikba viszi". A geometria ilyen szellemű megközelítése a Klein-programnak köszönhető. Egy racionálisan gondolkodó diák számára szörnyű lehet, hogy olybá tűnik, a definíció az egybevágóságot az egybevágósággal definiálja. Természetesen ez nincs így. A Klein-program ugyanis arról is szól, hogy minden geometriai témakörhöz megtalálhatjuk az ehhez illő természetes fogalmakat. Ez az elemi geometria esetén oly módon történik, hogy rögzítjük a kölcsönösen egyértelmű geometriai leképezések (transzformációk) egy körét, és a téma természetes fogalmai azok leszek, amiket az ilyen transzformációk változatlanul hagynak. Az elemi síkgeometria fogalmait tehát az egybevágósági transzformációk választják ki.[33] A távolság, szögnagyság, terület, kerület, stb. azért elemi síkgeometriai fogalmak, mert ezek mind változatlan jellemzői maradnak a síkbeli alakzatoknak,

[32] A szerző a 2004-es,Wolfgang Petersen rendezte *Trója* című filmre utal. (A szerk.)

[33] Ilyen egybevágósági transzformációk pl. a mozgatások (eltolás, forgatás), amelyek könnyen belátható módon változatlanul hagyják egy alakzat bizonyos jellemzőit, pl. a területét, a kerületét, a szögei nagyságát, így ezek a fogalmak az elemi síkgeometria fogalmaivá válnak. Az egybevágósági transzformációk a lineáris algebra fogalmaival (mátrixokkal) algebrailag leírhatók – ennek a leírásnak alapvető eszköze a vektor középiskolában tanult fogalma, melyre a következő bekezdésben utal a szerző. (A szerk.)

ha a síkot egybevágósági transzformáció alá vetjük. Hasonlóképpen a nagyítás, arány, szög stb. a hasonlósági transzformációk által kijelölt, tágabb értelemben vett síkgeometria fogalmai.[34]

Nem arról van tehát szó, hogy valami addig is tudott dolgot szintén addig is ismert dolgokkal rosszul definiálunk, hanem arról, hogy a Klein-féle megközelítéssel a megértésnek egy mélyebb szintjére jutunk. A racionálisan gondolkodó diák kérdése igenis indoklásra szorul. Mi ez a derült égből érkező villámcsapás, miért kell az addig jól működő intuitív fogalmakat első ránézésre alkalmatlannak tűnő definíciókkal újra bevezetni? Nem fojthatjuk a szót a kétkedőbe, valamit mondani kell, és erre a kérdésre a matematika tradíciója és fejlődésének egy epizódja a válasz. A geometriai problémáknak a Klein-program alapján ugyanis természetes és elfogadott megoldása, ha a kérdéseket vektorok segítségével fogalmazzuk meg, és vektoralgebrai eszközökkel adunk rájuk választ. A Klein-program szerint a geometria teljes leírása megadható ezzel a vektoros módszerrel, és ez a tudománymódszertani hatékonyság adja a vektoros leírás matematika tantárgyon belüli létjogosultságát.

> nem fojthatjuk a szót a kétkedőbe, valamit mondani kell

Vannak olyan tananyagtartalmak, melyek későbbi, felsőbb matematikai megjelenésük miatt kerülhettek be a középiskolai tananyagba. Minden kilencedikes találkozik az algebrai törtekkel, a tizedikeseknek pedig ezek közül bonyolultabbakat is át kell alakítaniuk. Ha megnézzük, hogy az egyetemi tananyagban ilyenek hol jelennek meg, látjuk, hogy az integrálszámítás az, ahol természetes módon előfordulhatnak. Általában egy tetszőleges függvény primitív függvényét (határozatlan integrálját) még akkor sem tudjuk feltétlenül felírni, ha arról egyértelműen elmondható, hogy létezik. Ez egy elég sajátos episztemológiai ízt ad az integrálszámításnak. Ennek ellenére van egy olyan függvényosztály, amely minden elemének fel lehet írni a primitív függvényét: éspedig az algebrai törtek osztálya. Erre a függvényosztályra vonatkozóan a primitív függvény felírásának problémája teljes és egységes megoldással rendelkezik. *Minden* elemének ismert a primitív függvénye.

Ezek csak kiragadott példák, de így is látható, hogy a matematika tananyagtartalmainak feledés homályába vesző eredete izgalmas matematikatanítási kutatási téma lehet. Hogy feltárjuk, mi lehet az oka, hogy éppen az van benne a matematikatananyagban, ami benne van. Szerettem volna azt is bemutatni, hogy nem feltétlen az a magyarázó hipotézis, hogy „ezeknek vannak mérnöki alkalmazásai". Pusztán az alkalmazások alkalmazás-voltával indokolni tananyagbeli létüket nem jó megközelítés, mert vannak olyan matematikai alkalmazások, amelyek egyáltalán nem kerültek be a tananyagba, pedig lépten-nyomon találkozunk velük; ilyen a projektív geometria, a perspektíva vagy a hipotézisvizsgálat, illetve a szignifikancia témája.

Miért érezhető más jellegűnek az egyetemi matematika-tananyag a középiskolaihoz képest?

Elérkeztünk tehát oda, hogy részválaszt tudunk adni arra a kérdésre, hogy miért érzik

[34] *Tarski* (1989)

másnak az egyetemi hallgatók a matematikát ahhoz képest, amit korábban tapasztaltak. Az egyetemi matematika nem vált el úgy a történeti hagyománytól, mint a középiskolai, vagy legalábbis nem felejtette el az eredeti motivációját. Míg a középiskolában nem kutatók tanítanak, addig az egyetemi oktatók aktív részesei az alkotó matematikai gondolkodást magába foglaló szellemtörténeti vonulatnak. A matematika érvelő, bizonyító, egységes leírásokat szolgáltató jellege és az ebből következő alapállás az egyetemi oktatóknak, tudományos szocializációjukból adódóan, már a vérében van. Nincs szükségük külső motiváló tényezőket bevonni a kutatásaik előrelendítéséhez, a matematika művelésének megvan a maga önálló, belső dinamikája és motivációja.

Ez utóbbi jelenséget gondolom a legfontosabb különbségnek a középiskola és az egyetem között, emellett pedig nyilvánvalóan a két intézmény közötti számos tanulásszervezési eltérés az, ami tanulást hátráltató tényezőként felmerül. Ám az is igaz, hogy ezekről a problémákról (és így az időbeosztásról, az önértékelésről, a mentorigényről, a szociokulturális háttérről) a középiskolákkal szemben az egyetemen nem igazán szokott szó esni. Ez lényeges, és szintén jellemzi – legalábbis papírforma szerint – a két szint közötti különbséget. Itt érdemes megemlíteni, hogy a hallgatók tanulásban mutatott sikerességét illetően a közelmúltban egy több országra kiterjedő vizsgálat zajlott, melynek eredményeiről a kutatók a Műegyetem Matematikai Intézetében be is számoltak. A kutatás azt mérte fel, hogy a hallgatók hogyan látják a felsőoktatásban a saját sikerességüket, hogy az érettségi eredményeikhez képest hogyan alakult az első féléves eredményességük, hogy milyen társadalmi háttérrel választottak szakot, illetve, hogy a felkészüléskor a saját bevallásuk szerinti időgazdálkodásuk hogyan függött össze az eredményességükkel. A kutatás BME hallgatókat felmérő részének két legérdekesebb eredménye a következő volt: Azok, akik első generációs értelmiségiek lesznek, inkább választottak középszintű érettségit és inkább jelentkeztek mérnökszakra. Ezzel szemben aki kutatószakra – fizikusnak vagy matematikusnak – jelentkezett, az szívesebben választotta az emelt szintű érettségit és a szülei között gyakran volt legalább egy értelmiségi. További érdekes összefüggés, hogy aki *akár közép-, akár emelt szinten* kiemelkedően eredményes volt (jeles eredményt ért el), az több kreditet szerzett az első félévben, mint aki *akár közép, akár emelt szinten* kevésbé volt sikeres (jó eredményt ért el az érettségin). Ez véleményem szerint azt mutatja, hogy aki bármely szinten képes volt elérni a legmagasabb szintet (ami középszinten 80%, tehát nem olyan nagyon magas), azaz egy előre kitűzött célt nagyon jó eredményességgel elért, az az egyetemen is sikeres, szemben azokkal, akik nekivágtak egy (emelt- vagy középszintű) vizsgának, de azt nem sikerült a legjobb eredménnyel teljesíteniük.[35]

a kutatás azt mérte fel, hogy a hallgatók hogyan látják a felsőoktatásban a saját sikerességüket

[35] A *„ReadySTEMgo" Erasmus+* projekt Műegyetemre vonatkozó kutatási anyagáról *Maarten Pinxter,* a Katholieke Universiteit Leuven kutatója tartott előadást 2016 végén a BME Matematika Intézetben, ennek diái a következő linken találhatók: http://math.bme.hu/~mozow/stem.pdf

5. KELL-E VÁLTOZTATNI A MATEMATIKA TANÍTÁSÁN, ÉS HA IGEN, MIT?

Radnóti és *Nagy* (2014) erősen foglalkozik azzal a kérdéssel, hogy milyen céllal kell matematikát tanítani. Az egyik célnak a tárgy belső logikájának és törvényszerűségeinek, a másik célnak a tárgy eszköz jellegének, más tárgyakhoz való viszonyának megtanítását jelöli meg. Világos, hogy amiről eddig beszéltem, az a matematika belső életét domborítja ki. *Radnóti* és *Nagy* (2014) cikkében nagyon kevés szó esik arról a kérdésről, hogy pontosan miben is rejlik a matematika saját jellegzetessége. Mint mondtam, én amellett teszem le a voksot, hogy a matematikát nem a vizsgálódásai tárgya, hanem a módszerei teszik azzá, ami. Ezzel viszont egyáltalán nem mondtam újat vagy mellbevágót. A fizikusok például nagyon büszkék arra, hogy a módszereiket nemcsak az élettelen természet tudományában tudják mozgósítani, hanem a szociológiában, az üzleti életben, sőt akár a történettudományban vagy a matematikában is. Hasonló lehetőséget tapasztalunk a matematikánál is: a matematika nem a számok és a geometriai formák tudománya – ahogy azt a régi lexikonok írják. A matematika eszközei bevethetők minden *érvelés alapú* témában, ahol az adott jelenségkör *teljes* és *rendszeres* módon történő leírására van igény.

a matematika eszközei bevethetők minden érvelés alapú témában

Annál vehemensebben érvel *Radnóti* és *Nagy* (2014) a matematika eszköz-, azaz alkalmazásjellegének hangsúlyozása mellett, és nekem olybá tűnik, hogy alkalmazáson és alkalmazhatóságon ez esetben nem ugyanazt értjük. Nagyon erősen gyanakszom, hogy itt arról a törekvésről van szó, hogy a matematika „szerviz-tudomány" jellegét kellene kommunikálni a diákok és a hallgatók felé, ezzel magyarázva meg a matematika létjogosultságát. Úgy látom, hogy a szerzőpáros is ezt vallja, és nem látom annak a nyomát, hogy az általuk is említett belső motivációs erő, önmagában is megálló motivációs bázis természetéről tájékoztatták volna a cikkük olvasóit. Emellett természetesen megkérdőjelezhetetlen, hogy a matematika alkalmazhatósága a természet- és társadalomtudományokban kiváló, ezek az alkalmazások évszázadok óta kölcsönösen hatnak egymásra, és erre a tényre mindig ki is kell térni az oktatás folyamán.

Számomra a cikk leginkább vitatható nézete a következő:

> Az előbbiek értelmében a matematikatanítás célrendszere is kettős. A kérdés ezek aránya. Jelen írásunkban arra szeretnénk rámutatni, hogy az egyik nagyon fontos cél a többi tudomány (iskolai tantárgy) számára megteremteni a szükséges matematikai alapokat. Véleményünk szerint ezen eszköztudás kialakítása fontosabb célkitűzés kell legyen a matematika mint szaktudomány világába való bevezetésnél. Ugyanis jóval kevesebb matematikusra van szükség, mint amennyi – a matematikát magas szinten alkalmazni tudó – mérnökre, gazdasági- és természettudományos területen dolgozó szakemberre. Ezen kívül kevesebb a kifejezetten a matematika felé orientálódó emberek száma, mint azoké, akiket olyan szakterületek érdekelnek, amelyek igénylik a matematikát mint eszközt a problémák megoldásához, világunk működésének leírásához. (90)

A továbbiakban ezzel az idézettel és a mondanivalójának sarkított változataival szeretnék foglalkozni.

A matematika kettősségének mítosza

Az az állítás, hogy matematikusra nincs szükség (akkora számban), csak a matematikára (mint alkalmazott tudományra), nem állja meg a helyét. A BME Matematika Intézete *Témalabor* nevű kezdeményezése évek óta várja a matematikushallgatókat, hogy a matematikai tudásukat más tudományokban is alkalmazzák.[36] Egyáltalán nem arról van szó, hogy olyan hallgatók alkalmaznák a matematikát, akik nem matematikushallgatók, hanem éppen fordítva: matematikushallgatók keresnek nem matematikai témákat és nem matematikus kutatókat, és dolgoznak együtt velük, hogy közösen tudjanak közgazdaságtani, vegyészeti, gépészeti, informatikai problémákat matematikai módszerekkel feldolgozni. Nagy szükség van jól képzett, szakmájukban tájékozott matematikusokra, akik témafüggetlenül tudnak jól beilleszkedni egy nem matematikus közegbe és ott a többiekkel hatékonyan összedolgozni. A Műegyetem matematikushallgatói szép számmal vesznek részt a Témalaboron, de legkésőbb az iparban elhelyezkedve végzik ezt a fajta, csoportban alkotó tevékenységet.

Egy másik lényeges dolog, hogy a matematika egyetemi oktatásában sem szabad *gyökeresen* szétválasztani a csak a matematikusoknak szánt matematikát a mérnököknek szánt matematikától. Nyomás nehezedik a nem matematikus hallgatókat tanító matematikaoktatókra, hogy ne tanítsanak bizonyításokat, vagy csak olyan jellegűeket, amelyek, mondjuk, kombinatorikaiak, és konkrét számolásokhoz kapcsolódnak. Az előzőekből következik, hogy ha az *érvelést, bizonyítást, igazolást* minden nyom nélkül eltávolítjuk a képzésekből, akkor a matematikát az őt meghatározó jellegétől fosztjuk meg. Ez olyan, mintha azt mondanánk, hogy a történelemtanításban ne ragaszkodjunk a forrásokhoz és a régészeti adatokhoz, mert a mondák és közhiedelmek sokkal színesebb és érdekesebb képet adnak a történelemről. Ez így van, azt is hasznos tudni, hogy az embereknek milyen hiedelmeik vannak – csak az nem történettudomány, hanem, mondjuk, kulturális antropológia.

> matematikushallgatók keresnek nem matematikai témákat és nem matematikus kutatókat, és dolgoznak együtt velük

A matematika tantárgy az alkalmazásokon *kívül* olyan dolgokat is meg tud tanítani a hallgatóknak, amit egy, a matematikát alkalmazó nem-matematikus nem tud megtanítani. Ez pedig: egy jelenség rendszeres és teljes leírása. A mérnök egy problémára egy konkrét eszközt gyárt, mely a hibahatáron belül eléri a kívánt célt. A matematikus azonban nem csak a számításokban vagy a tervezésben tud segíteni. Azt is meg tudja mondani, hogy egy adott problémának milyen megoldásait *ne* keressük sose. A matematikus a sajátos eszközeivel képes *végtelen sok* lehetőséggel is dolgozni és kizárni azokat a megoldásokat, amelyek már *elvi okokból* sem tudják a megfelelő választ adni a problémára. Az összes esetet rendszeres, egységes és teljes végiggondolása nem

[36] A Témalabor vezetője dr. Lángné dr. Lázi Márta, a BME Matematika Intézet Analízis Tanszékének docense.

feltétlenül mérnöki feladat, de nyilvánvalóan szükséges.

Nem akarom azt állítani, hogy csak egyféleképpen lehet matematikát tanítani. Viszont jó lenne, ha a „matematika mint számolás” képet előnyben részesítők is elfogadnák, hogy van más megközelítés is. Felajánlok egy kézenfekvő megoldást. Hallgatók fogalmazzák meg gyakran, hogy nem értik, miért kell kismillió számítást elvégezniük, amikor ezeket a feladatokat, akár szimbolikusan részletezve is, a *Wolfram Alpha*[37] elvégzi helyettük. Igen, éppen ezért lenne jó ezeket a számításokat már eleve informatikai eszközökkel elvégezni. Cserébe viszont lesz idő az alapvető fogalmakat tisztázni és megmutatni, hogy az érvelésekben ezeket hogyan kell felhasználni (azaz néhány bizonyítást is megérteni). Így sokkal közelebb kerülnénk az alkalmazásokhoz (hiszen a számításokat a mérnökök sem papíron végzik) és a matematika természetét is sikerülne kommunikálni.[38]

ezért lenne jó ezeket a számításokat már eleve informatikai eszközökkel elvégezni

A mindennapi életből vett példák mítosza

Az utóbbi két évtizedben előtérbe került az a nézet, hogy a matematikaórán olyan feladatokat kell megoldani, amelyeknek hétköznapi alkalmazásai vannak. Ez a szemlélet a matematika értékét a külső alkalmazások felől próbálja bemutatni. Én úgy látom, ez nem mindig sikerül. Felteszek két egyszerű kérdést. Szeretném tudni, hogy komolyan gondoljuk-e azt a nézetet, hogy a matematikaórán elsősorban a mindennapi élet számokkal kapcsolatos problémáira kell választ adni.

X matematikatanár kolléga nagy tudású, tehetséggondozó munkáját díjjal értékelték. Kiszámította, hogy a svájci- frank-hitel felvétele előnyösebb, mint a forinthitel felvétele, mert kevesebbet kell a banknak visszafizetni. Vajon rábíznánk-e *X*-re a való életben ezt a döntést? Tényleg egy matematikust kell erről megkérdezni? Nem inkább egy közgazdászt, aki viszont lebeszélne minket arról, hogy a svájci frank alapú kockázatos hitelt vegyük fel, és inkább a fix törlesztőrészletű, ám drágább forinthitelt javasolná?

A fordított példa: *Y* könyvelő szerint 2 + 3 x 4 = 20. Nyilvánvaló, hogy megbukna a matematikaérettségin. Lehet, hogy már kamatos kamatot sem tud számolni, mert mindig informatikai programcsomaggal végzi el a számításokat. Viszont még sohasem tévedett az adóbevallás beadásakor. Vajon megbízunk-e benne, vagy elutasítjuk, mert nem ismeri a műveleti sorrendet?

Természetesen a matematika tanításában megvan annak a tradíciója, hogy bizonyos kérdéseket a mindennapi életből vett példákon szemléltetünk, és ezek a példák matematikatanár-generációk sokaságán keresztül nemzedékről nemzedékre továbbhagyományozódnak. Ilyen például a lottóöttalálatos valószínűsége, vagy az a kérdés, hogy ha 2 ember 20 ajándékot 3 óra alatt csomagol be, akkor 5 ember 40 ajándékot hány óra alatt csomagol be. Hosszú év-

[37] https://www.wolframalpha.com/

[38] Itt szeretnék utalni arra a zavarba ejtő tényre, amire *Csapó Benő* hívta fel a figyelmet, hogy a középiskolában a magyarosztályzat erős korrelációban áll a matematikaosztályzattal (és a verbális képességek gyenge, de tulajdonképpen létező korrelációban állnak a matematikatudással). A probléma helyes értelmezése megtalálható *Rajnai Judit* írásában (2003).

tizedek alatt kialakult a szöveges példák esetén az az egyensúly, mely a matematikai problémafelvetéseket összeköti a valósággal, és a kérdéseket természetes nyelvre átfogalmazva teszi fel. Viszont ha rosszul felfogott okból vetünk fel egy kérdést, vagy – ahogy Nahalka István mondja – *pedagógiai elméleti háttér feltételezése és a célok tisztázása nélkül* tűzünk ki egy problémát a mindennapi életből, gyakorlatiasságot mímelve,[39] akkor könnyen pedagógiai torzszülöttek keletkezhetnek a kezünk között.

könnyen pedagógiai torzszülöttek keletkezhetnek a kezünk között

A következő példában egy olyan torzszülött feladat szerepel, mely nemcsak erőltetett, de amelynek a kitűzője által várt helyes megoldása kifejezetten az alkalmazások ellenében hat. Egy emelt szintű érettségi példában adott volt egy harmadfokú függvény, ami egy ideig emelkedett, majd visszasüllyedt, majd megint emelkedett (ezt a matematikusok nem így mondanák, de így érthetőbb).[40] Azt kellett eldönteni, hogy ez a harmadfokú görbe képes-e egy mamutfenyő magasságának növekedését leírni. Egy diák válasza az volt, hogy nem, mert a harmadfokú függvény sokkal gyorsabban növekszik, mint amit egy mamutfenyőtől el lehetne várni (ti. a növekedési gyorsasága az idővel négyzetesen növekedne, ami ellentmond a mamutfenyőkről tapasztaltakkal). A hivatalos megoldás szerint szintén nem alkalmas erre a harmadfokú, de az indoklás az volt, hogy azért, mert van a görbének „visszacsökkenő" szakasza, márpedig olyat a mamutfenyő nem tud tenni. Nos, állítólag ez egy alkalmazás jellegű feladat. A baj az, hogy éppen tudunk arra példát mondani, hogy ilyen függvényt hasonló környezetben használnak. A fizikusok az úgynevezett valóságos gázok (van der Waals-gázok) izotermáit[41] pont ilyen harmadfokú függvényekkel modellezik, és csöppet sem zavarja őket az, hogy izoterm összenyomásnál a gáz térfogata a matematikai modellben nem monoton csökken. Egyszerűen a problémás szakaszt egy konstans egyenes szakasszal helyettesítik. A vérbeli alkalmazás ez lenne. Az erőltetett életszagúság pedig megszégyenül a valódi fizikai alkalmazás árnyékában.

Egyszerűen a problémás szakaszt egy konstans egyenes szakasszal helyettesítik. A vérbeli alkalmazás ez lenne.

A matematika alkalmazásának kooperatív modellje

A matematikában alkalmazások – például genetikai, fizikai vagy közgazdaságtani alkalmazások – tanítása kényes ügy. Szeretnék a biológusok, kémikusok, fizikusok, ha a matematikatanár tanítaná meg azokat a valóban matematikai természetű feladatokat, amik a tárgyaikban felbukkannak. Ám ez nem ilyen egyszerű. A fenti példák a következőkre tanítanak minket:

[39] *Nahalka* (2014)

[40] Emelt szintű matematika érettségi, 2006 október, 6 c) feladat. http://dload.oktatas.educatio.hu/erettsegi/feladatok2006osz/emelt/e_mat_06okt_ut.pdf

[41] Izoterma: az állandó hőmérsékletű pontokat összekötő vonal a gázok térfogatának és nyomásának változását ábrázoló diagramban.

1. Ha az iskolán kívül (a felnőtt életben, munkaszituációban) felvetődik egy matematikai jellegű probléma – egy adott szakmán belül –, akkor a matematikust nem hagyják egyedül. Ilyenkor a problémán vegyes csapat dolgozik, a szakember vázolja a problémát, a matematikus ad egy választ, majd egészen biztos, hogy a szakember erre reagál, és módosítja a kérdését, hogy az ne csak pusztán matematikai megoldása legyen a feladatnak, hanem a szóban forgó szakma is tudjon a válasszal mit kezdeni.
2. Ha valósághű módon akarjuk modellezni a mindennapi életben felvetődő kvantitatív, de nem matematikai problémák megoldását, akkor nem hagyhatjuk magára sem a matematikatanárt, sem a diákot. Nem tolhatja rá a biológus vagy a kémikus a matematikai problémája megoldását egyedül a matematikusra, mert abból előre kiszámítható módon a tevékenység feladása következik. Mindenki hallott már ilyet matematikatanár szájából: „Gyerekek, én ezt a példát nem tudom megoldani, nem értek a kémiához."
3. Ezeknek a problémáknak az iskolai rekonstrukciójában tehát követni kell a valóságos munkamenetet. A vegyes feladatokat *csapatban,* különböző, magas felkészültségű szakértők *bevonásával* kell megoldani és nem magára hagyni a szereplőket (diákot, tanárt), hogy a saját levükben főjenek. Igen, a tanítás csapatmunka.
4. Kiegészítő megjegyzés. *A csapatban mindenkinek okostelefon kell, hogy legyen a kezében, vagy laptop az ölében, korlátlan internetcsatlakozással.* A tudás kimeríthetetlen forrása ott van a neten. Enélkül nem megy a dolog, se egy általános iskolásnak, se az akadémia tagjának.

A tanulásszervezésnek az a formája, amelyet ez előbb leírtam, a *matematika alkalmazásának kooperatív modellje*. Ez egyáltalán nem ismeretlen tanulásszervezési forma, pusztán arról van szó, hogy azt a problémamegoldási stratégiát, amelyet a matematika éles helyzetekben való alkalmazásánál tapasztalunk, a tanulási helyzetekben rekonstruáljuk. Ebben a rekonstrukcióban két elemet kapcsolunk össze: a *csoportmunkát,* mely a reformpedagógiáknak már rég bevett módszere, és az „útinapló-módszert", mely a demokratikus nevelési iskola egyik érdekes módszere.[42] Itt arról van tehát szó, hogy amikor a diákok egy csoportja találkozik egy problémával, először végig kell gondolniuk, hogy milyen tudásokat kellene mozgósítani a feladat megoldásához. Majd nyilván konzulenseket kell bevonniuk, hogy meg tudják mondani, merre kell keresniük a megoldáshoz vezető utat. A külső szakértők el fogják őket igazítani, hogy adott probléma esetén milyen módszerek állnak rendelkezésre, de a problémát végső soron nekik maguknak kell megoldani, ezért ki kell alakítaniuk a csoportban a szerepeket, és a probléma megoldásához ki kell osztaniuk a feladatokat. Ebben a módszerben tehát nincsenek magukra hagyva a gyerekek, de hogy kitől milyen segítséget kérnek, az rájuk van bízva. És persze komoly szaktárgyi felkészültségű tanárokra van szükség, akik valóban tudnak segíteni a gyerekek problémáiban.

[42] *Peschel* (2017)

A tantervi összehangolás, az általános iskolai vagy gimnáziumi integrált természettudományos tárgy mítosza és a tanári kar valós kooperációjának igénye

Az előbbiek megvilágítják azt is, hogy miért kudarcos a matematikai hiányosságok problémáját azzal próbálni megoldani, hogy a különböző szaktárgyak tantervét *összehangoljuk*. A tantervek összehangolási vágya és az e tekintetben tapasztalható buzgalom nagyfokú. Mindenki évtizedek óta hallja azokat a lózungokat, hogy azért nem mennek az ilyen-olyan számítások, mert a matematikaórán nem jól tanították meg a matematikát, vagy nem jó ütemben tanították meg azt. Ha ez tényleg így lenne, akkor csodák történnének azokban az esetekben, amikor a tantervek összehangolása megtörténik. De nem nagyon látjuk ezeket a csodákat. A probléma megint abból származik, hogy nem a fenti, valóságban gyökerező modellt használják az oktatásban. Nem; a kémiai, fizikai, biológiai számításokat nem lehet egyedül rátolni a matematikatanárra. Minden szakmának megvan a sajátos számítási logikája, és ezt csak *együtt* tudjuk jól megtanítani. Ahogy a cégek matematikusokat alkalmaznak a problémák megoldásra, és ahogy ezek a matematikusok összedolgozhatnak a cég más szakembereivel, úgy kell az iskolában is a közös problémamegoldást propagálni.

Megoldásként felvetődik, hogy legyen egyetlen integrált természettudományos tárgy. (Most itt nem az utóbbi időben a szakgimnáziumokban bevezetett integrált természettudományos tárgyról beszélek. Ez utóbbinak akár még meg is lehet a maga funkciója, hisz egy gépésznek, elektrotechnikusnak így nem kell feltétlenül a középiskolában biológiát vagy földrajzot tanulnia, helyettük annál több mechanikát vagy villamosságtant – amire szükségük van.) Az integrált természettudományos tárgy, ahogy az az 1990-es években felvetődött, ugyanúgy zsákutcás megoldás, mint a tantervi összehangolás, ha azt az egyes tárgyak helyett általános iskolában vagy gimnáziumban bevezetnék. Egy integrált természettudományos tárgy oktatója csak közepesen tudhatja a tárgy tananyagának valamennyi résztartalmát. Éppen a szakember segítsége hiányozna a problémák lényegi megoldásánál. Lehet, hogy mindenki nagyjából megértené a kérdést, de konkrétan senki nem tudna rá válaszolni, mert egy integrált tantárgy oktatója nem lesz birtokában sosem olyan kompetenciának, mint egy egy- vagy kétszakos kolléga.

> akkor lesz jó egy iskola, ha pedagógiai műhellyé válik

A természettudományok tanításának integrációja nem a tantárgyak és a tanár szintjén kell, hogy létrejöjjön, hanem a diák elméjében. Ennek eléréséhez a szaktanároknak szintén össze kell dolgozniuk: igen, a tanári munka csapatmunka. Jelen helyzetben, amikor a tantestületek nem alkotó pedagógiai műhelyek, hanem felülről motivált és szabályozott egyéni szereplők egymáshoz nem kapcsolódó összességei, szintén a *kooperatív munkaszervezés* lenne az egyetlen járható út a minőségi előrelépés beindítására. A hejőkeresztúri iskolai reform mutatta meg, hogy egy átlagos vidéki iskola is el tud indulni a pedagógiai kiválóság felé, ha az iskola vezetősége normává teszi a pedagógiai folyamatok végiggondolását, kreatív szakmai tevékenységként való felfogását. Akkor lesz jó egy iskola, ha pedagógiai műhellyé válik. Pedagógiai műhellyé pedig akkor válik egy iskola, ha a helyi sajátosságoknak megfelelően a tanárokban kialakul az igény saját, közös módszerek kifejlesztésére, vagy ahogy *Nahalka István* mondja: ha a tanárok *kutatótanárrá, kutatóközösséggé* válnak (nem a fogalom bérkategoriális, hanem önreflexiós, munkaszervező értelmében).[43] Megjegyzem, hogy a hejőkeresztúri iskola nem a demokratikus nevelési utat választotta, hanem a reformpedagógiát (főleg az irányított csoportmódszert) adaptálta állami keretek között, de ez nyilván a hely sajátosságaiból adódott.[44]

Néhány további reakció a cikkekre

Radnóti és *Nagy* (2014) cikke mellett az *ELTE Radnóti Gimnázium matematika munkaközössége* által jegyzett vitacikk (2014) is kitér az integrál- és differenciálszámítás (röviden: kalkulus) tanítására. Nos, ha most a fizika és a matematika relációjában nézzük a kérdést, a következő a helyzet: a kalkulus nem középszintű érettségi téma, de az emelt szinten érettségizni szándékozók is csak viszonylag későn tanulják. A fizika érettségi anyagban nincs benne explicit módon semelyik szinten. Elképzelhető, hogy képes egy felkészítő tanár arra, hogy nem is tesz említést a kalkulusról, de azért ehhez nagy önuralomra van szüksége. A kalkulus tehát a fizikából kimarad. Ha mégis bele akarjuk szuszakolni a tananyagba, akkor az első megoldás az, hogy a fizikatanár vezeti elő. Mindkét cikk azt hangsúlyozza, hogy ezt csak hevenyészve, kutyafuttában fogja megtenni a tanár. Természetesen én ezt ugyanúgy elítélem, mint mindenki, de fel szeretném hívni a figyelmet arra, hogy a fizikában ennek a rohanásnak tantárgypedagógiai okokból nem lenne szabad megtörténnie. A fizikus számára ugyanis a derivált nem más, mint a pillanatnyi sebesség (illetve gyorsulás), az integrál pedig lényegében nem más, mint az út (vagy a munka). Ezeket a fogalmakat a fizikatanár nem akarná megértetni a diákjaival? Tényleg lehetséges, hogy nem mondja el egy fizikus, hogy *pontosan* mik ezek a dolgok? Mit nyer azzal a fizikatanár, ha a matematikatanár mondja el a deriváltat, aki nem a sebességből fog kiindulni, hanem másból (mondjuk az érintőproblémából)? Ha ezt a fizikus megtenné, azaz lemondana arról, hogy ő (is) definiálja a deriváltat és az integrált, azzal a sebesség vagy a munka definíciójáról mondana le. A kalkulus képleteihez pedig a matematikatanár sem kötődik mélyebb érzelmekkel, mint a fizikatanár. A másik megoldás pedig nem jó megoldás; nem üdvös az, hogy *fizikai nyelven* mondja el a matematikatanár, hogy mi a derivált, mert ő ezt nem feltétlenül tudja megtenni, és nem is kell tudnia.

> Ezeket a fogalmakat a fizikatanár nem akarná megértetni a diákjaival?

További probléma lehet a kölcsönös meg nem értés, akár középiskolában, akár az egyetemen. Kalkuluson a matematikus (költői túlzással) teljesen mást ért, mint a fizikus. A kalkulus a fizikatanárnak sebesség és út. A matematikusnak érintő- és kvadratúraprobléma.[45] Ami szükséges: ezek csodálatos egymásra találása. Ha matematikaórán csak sebességként tanítanánk a deriváltat, ahogy elegendő lenne egy fizikus számára, akkor megfosztanánk a diákokat olyan összefüggések megismerésétől, amelyek később éppen jók lennének

43 *Nahalka* és *Sipos* (2016)
44 *Ferencsik* és *Orosz* (2017)
45 A kavdratúra azt jelenti, hogy adott függvény grafikonja alatti területet jól megválasztott téglalapok területével közelíthetjük.

a fizikában.[46] Ha viszont a fizikában a kalkulusra csak mint matematikai eszközre utalunk, akkor elmulasztjuk megértetni a diákokkal a pillanatnyi sebesség fogalmát. Ezek egyikét sem akarjuk. A megoldás, hogy mindkét módon meg kell tanítani a kalkulust: fizikán is, mint alapvető mechanikai fogalmat (változási gyorsaság) és matematikán is, mint függvényterek között ható lineáris operátort. Ezt a két szemléletet kooperációban kell egymáshoz illeszteni, és mindenki jól fog járni: a matematikus tud majd sajátrezgésekre mint alkalmazásokra utalni, a fizikus pedig tud majd sajátvektorokra mint kész algebrai elméletre utalni. Ha ezt az utat szépen végigjárjuk az egyetemen, akkor nem lehet gond azzal, hogy a középiskolában nem volt kalkulus. Lehet, hogy vannak olyanok az egyetemeken, akik ezt nem így gondolják, de én azt hiszem, hogy többségben vannak azok az oktatók, akik látják, hogy ha tanítanak, és nem hárítanak, akkor abból jó és csakis jó születik.

ha tanítanak, és nem hárítanak, akkor abból jó és csakis jó születik

Radnóti és *Nagy* (2014) cikke nagyrészt a fizika tantárgy tanítási nehézségeiről szól. Ehhez nehéz lenne hozzászólnom, de véleményem szerint egészen biztos, hogy akár így, akár úgy, de változtatni kell a fizikatanítás módszertanán is. Igen, a matematikai tudás csökkenésével a fizikát tanítók alól kiesett a matematikai mankó, és nem tudják már a „képletfizikát" vagy „táblafizikát" vagy „krétafizikát" folytatni. De éppen ezért a helyzet reménnyel teli: a tanárok rá lesznek kényszerítve, hogy változtassanak, és jelenségfizikát kezdjenek tanítani. És valóban, ha beletekintünk az MTA–ELTE Fizika Tanítása Kutatócsoport munkájába, amiről pl. *Nagy-Czirok Lászlóné* részletesen beszámolt,[47] akkor gyakorlatilag végtelen távlatok nyílnak előttünk egy kiváló, *kooperatív* fizikatanítás irányába.

Az *ELTE Radnóti Gimnázium Matematika Munkaközössége* (2014) cikke elénk tárja a korlátokat is. A mai rendszerben a tantervi kötöttségek behatárolják a tanárok pedagógiai módszereit. Valóban, adott esetben a tanár nem alkalmazhatja a projektmódszert vagy a matematika alkalmazásának kooperatív módszerét, mert senkinek sincs ideje három hónapot elvesztegetni ezekre akkor, amikor el kell jutnia a matematika érettségi anyag megfelelő szintű elsajátításához. Márpedig egyetlen számszerű kimenet van: a matematika vizsgadolgozatra adható 100 pontból a lehető legtöbbet kell elérni. De vajon akarjuk-e, hogy a kérdésre: „És mi van a matekkal?" az legyen a válasz, hogy: „97"?

És még valami. Az egyetem tömegesedésével kapcsolatban vet fel kérdéseket *Horváth Eszter* (2016). A személyes véleményem erről, hogy egy magyar ifjúság van, és meg kell azzal tisztelnünk a lányainkat és fiainkat, hogy minél többjüket megpróbáljuk felkészíteni az egyetemre, ott mindent megteszünk, hogy megmaradjanak, és nagyon sokat okosodjanak. A tudás mindannyiunk érdeke. A közös magyar matematikai tudás kulturális örökségünk, amit meg kell védenünk és tovább kell hagyományoznunk utódaink számára.

[46] Ha nincs rendesen végigjárva az a matematikai út, ami a deriválttól az integrálig vezet és vissza, akkor később nem lehet differenciálegyenletek megoldásáról beszélni.
[47] *Nagy-Czirok Lászlóné* (2017)

6. ÖSSZEGZÉS

A Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Matematika Intézetében kiterjedt kutatómunka folyik, mely fel kívánja tárni, hogy mi okozza a hallgatók kezdeti sikertelenségét, és azt is, hogy ezt miként lehet mérsékelni. A Matematika Intézetben a felzárkóztató munkának számos formája lehetséges, ezeket a hallgatók igénybe is veszik, és sikerrel mérsékelik a matematikai tudásukban feltárt hiányosságok mértékét. Természetesen ezzel messze nem értünk a probléma megoldásának végére, ahogy a felső- és középfokú oktatás közötti kommunikáció bajait sem oldottuk meg. Meg kell találni azokat a szakmai fórumokat, ahol a témák szabadon körüljárhatók, a szakmai tartalmak korlátozás nélkül szabadon megoszthatók, a közös országos szakmai tudás bővíthető. Erre kiváló hely az *Érintő* online matematikai portál és az *Új Pedagógiai Szemle*, de ne feledkezzünk el a szegedi *A matematika tanítása* módszertani folyóiratról sem.

A matematikának a saját alkalmazásai összességével való azonosítása nem járható út, az alkalmazásokban a matematika belső logikáját is mozgósítani kell, illetve annak a témának a belső szakmai logikáját is, amelyben az alkalmazás megtörténik. Ezt kooperációban lehet csak kivitelezni, hogy a szakmai tudások ne egyenletesen közepesen, és ne is egymást kioltva, hanem maximálisan kihasználva és egymást erősítve tudják képviseltetni magukat a probléma megoldásában. A matematika csak akkor tud érdemben hozzáadni egy megoldás szakmai értékéhez, ha nemcsak a számítás eszköze, hanem a belső logikájával járul hozzá a közös célhoz. Ehhez viszont szakmailag jól képzett és nyitott gondolkodású matematikusok és matematikatanárok kellenek. Ugyanerre a következtetésre jutottak a fizika tanításának megújításáért küzdők is a fizikusokkal és fizikatanárokkal kapcsolatban, lásd *Nagy-Czirok* (2017).

a matematikának a saját alkalmazásai összességével való azonosítása nem járható út

A matematika középiskolai tanítása vonatkozásában célszerű feltárni, hogy az egyes tananyagtartalmak milyen elvi vagy gyakorlati megfontolások eredményeképp kerülhettek be a tantervbe. Erre a kérdésre nem tudunk érdemi választ adni, ha csak és kizárólag az alkalmazások által motiváltnak látjuk a matematikai tartalmak tantervbe kerülését. Komolyan fel kell dolgozni a matematika belső motivációit, és ebben természetesen a matematikához értő emberek munkájára van szükség. A kérdést minimum tudománytörténeti, tudománymetodológiai, tudományszociológiai kontextusban is meg kell vizsgálni, továbbá számos más, itt nem részletezett aspektusból is.

A tantárgyi integráción és a tantervek összehangolásán kívül meg kell vizsgálni azt is, hogy a diákok és a tanárok közötti kooperáció (a tantárgyak összemosása nélkül) milyen módon valósulhat meg. Ezt az iskolák szintjén kell megvizsgálni. Egy tehetséggondozó iskolában, ahol sikeres a felkészítés, nem kell a struktúrán változtatni, de egy tanulási sikeresség szempontjából kihívásokkal küzdő iskolában nem másolhatók a tehetséggondozó központok módszerei. Azoktól gyökeresen eltérő módon, adott esetben csoportos tananyagfeldolgozással vagy más pedagógiai módszerekkel kell elérni a sikeresség növelését.

Nyitottaknak kell lennünk a szakmai kommunikációra, és a párbeszédet folytatnunk kell. Ami a magyar közoktatásban leginkább hiányzik (de persze nem csak a magyarban), azok a kooperatív tanulási formák. *Nahalka és Sipos* (2016) arról beszél, hogy a legújabb kutatások szerint kimondható: nemcsak a gyerekeknek kell összedolgozniuk, hanem a tanároknak is. Az iskolának és tanári karának kutatóhellyé kell alakulnia. Nem csak a sztártanárok, sztárszakértők az iskolai helyzetek szakértői, nem csak az ő joguk megnyilvánulni. Minden tanár, akinek a kezén évek alatt diákok százai mennek keresztül: pedagógiai szakértő. Még akkor is, ha nem így gondol magára. A közoktatás megjavítását nem várhatjuk kívülről, azt nekünk kell megkezdeni saját óráinkon, a saját munkaközösségeinkben. Kik lennének a szakértők az oktatásban, ha nem a minden nap a gyerekek között élő tanárok?

> nemcsak a gyerekeknek kell összedolgozniuk, hanem a tanároknak is

IRODALOM

Bakonyvári Dávid és Szilágyi Brigitta (2017): ZERO2HERO – Az alternatív felzárkóztatás. In: Aradi Bernadett, Bujdosó Gyöngyi, Horváth Géza, Szokol Patrícia (szerk.): *Informatika a felsőoktatásban 2017 konferencia kiadványa*. 257–-264. o. Debreceni Egyetem Informatikai Kar, Debrecen, 2017.

Benacerraf, P. (1965): What Numbers Could Not Be. *Philosophical Review,* **74.** 1. sz., 47–73.

Csákány Anikó (2013): Mit tudnak az elsőéves műegyetemi hallgatók a vektorokról? *Acta Carolus Robertus*, **3.** 1. sz., 189–196. Letöltés: http://epa.niif.hu/02400/02498/00005/pdf/EPA02498_acta_carolus_robertus_2013_1_189-196.pdf (2017. 09. 12.)

Csákány Anikó és Pipek János (2010): A 2009 szeptemberében a műszaki és természettudományos szakokon tanulmányaikat kezdő hallgatók által írt matematika felmérő eredményeiről. *Matematikai lapok*, **16.** 1. sz., 1–15.

Dummett, M. (2000): *A metafizika logikai alapjai*. Osiris, Budapest.

ELTE Radnóti Gimnázium Matematika Munkaközössége (2014): Vita a matematikaoktatás problémáiról egyetemi és középiskolai nézőpontból – Gondolatok a matematika tanításáról és taníthatóságáról. *Új Pedagógiai Szemle,* **64.** 11–12. sz., 88–91. Letöltés: http://folyoiratok.ofi.hu/uj-pedagogiai-szemle/vita-a-matematikaoktatas-problemairol-egyetemi-es-kozepiskolai-nezopontbol-1 (2017. 09. 12.)

Ferencsik Marcell és Orosz Gabriella (2017. 08. 26): Fókuszban a tanári attitűd. *Tani-tani Online*. Letöltés: http://www.tani-tani.info/fokuszban_a_tanari_attitud (2017. 09. 12.)

Gödel K. (1995): Some basic theorems on the foundations of mathematics and their implication [1952]. In: Uő: *Collected Works III.* Oxford Press.

Horváth Eszter (2016): Dolgozatírás a középiskola és a felsőoktatás határán. *Érintő*. Letöltés: http://www.ematlap.hu/index.php/tanora-szakkor-2016-09/313-dolgozatiras-a-kozepiskola-es-a-felsooktatas-hataran (2017. 09. 12.)

Kalmár László (1957): Az ún. megoldhatatlan matematikai problémákra vonatkozó kutatások alapjául szolgáló Church-féle hipotézisről. *Az MTA Matematikai és Fizikai Osztályának Közleményei,* **7.** 1. sz., 19–37.

Lángné Lázi Márta, Molnár Zoltán Gábor és Nagy Ilona (2017): BME Alfa: interaktív gyakorlás és versenyzés, *Érintő*. Letöltés: http://www.ematlap.hu/index.php/tanora-szakkor-2017-06/459-bme-alfa-a-kozepiskola-es-a-felsooktatas-hataran (2017. 09. 12.)

Mihancsik Zsófia (2002): Kizárólag a minőség (beszélgetés Komoróczy Géza egyetemi tanárral). *Élet és Irodalom,* **46.** 31. sz. 2002. augusztus 2. Letöltés: http://www.es.hu/old/0231/interju.htm (2017.09.12.)

Nagy-Czirok Lászlóné (2017): A természettudományos gondolkodás fejlesztése projektekben. *Új Pedagógiai Szemle,* **67.** 5-6. sz., 43–60. Letöltés: http://folyoiratok.ofi.hu/sites/default/files/journals/upsz_2017_5_6_online.pdf (2017.09.12.)

Nahalka István (2014): Elmélet és gyakorlat távolsága – realitás vagy süketelés? (blogbejegyzés). Letöltés: https://nahalkaistvan.blogspot.hu/2014/08/elmelet-es-gyakorlat-tavolsaga-realitas.html (2017. 09. 12.)

Nahalka István és Sipos Judit (2016): Az iskola eredményességével kapcsolatos nézetek. In: Vámos Ágnes (szerk.): *Tanuló pedagógusok és az iskola szakmai tőkéje.* ELTE, Budapest. 37–57. Letöltés: http://www.eltereader.hu/media/2017/05/Vamos_Agnes_Tanulo_pedagogusok_READER.pdf (2017. 09. 12.)

Peschel F. (2017. 06. 07): A tanulás demokratizálása. *Tani-tani Online*. Letöltés: http://www.tani-tani.info/a_tanulas_demokratizalasa (2017. 09. 12.)

Pipek János és Radnóti Katalin (2009): A fizikatanítás eredményessége a közoktatásban. *Fizikai Szemle*, **58.** 3. sz., 103–107. Letöltés: http://fizikaiszemle.hu/archivum/fsz0903/FizSzem-200903.pdf (2017. 09. 12.)

Radnóti Katalin és Nagy Mária (2014): A matematika szerepe a természettudományos képzésben. *Új Pedagógiai Szemle,* **64.** 5–6. sz., 89–102. Letöltés: http://folyoiratok.ofi.hu/uj-pedagogiai-szemle/a-matematika-szerepe-a-termeszettudomanyos-kepzesben (2017. 09. 12.)

Rajnai Judit (2003): Az osztályozás és a buktatás problematikája a mai magyar közoktatásban. *Új Pedagógiai Szemle,* **53.** 11. sz., 67–76. Letöltés: http://folyoiratok.ofi.hu/uj-pedagogiai-szemle/az-osztalyozas-es-a-buktatas-problematikaja-a-mai-magyar-kozoktatasban (2017. 09. 12.)

Szabó Árpád (1998): *A görög matematika. Tudománytörténeti visszapillantás* (*Magyar Tudománytörténeti Szemle Könyvtára 4).* Magyar Tudománytörténeti Intézet – Tájak–Korok–Múzeumok Egyesület. Budapest.

Szilágyi Brigitta (2017): Törődés talentumainkkal – A BME Tehetségsegítő Tanácsának munkájáról. *Magyar Tudomány,* **178.** 1 sz., 103–108. Letöltés: http://www.matud.iif.hu/2017/01/16.htm (2017. 09. 12)

Tait, W. W. (1981): Finitism. *Journal of Philosophy,* **78.** 9. sz., 524–546.

Tarski, A. (1989): Melyek a logikai fogalmak? In: Ő: *Bizonyítás és igazság.* Gondolat, Budapest.

Tóth Imre (2010): A szubjektum és szabadsága. A matematika alapjairól. *Ponticulus Hungaricus,* **14.** 5. sz. Letöltés: http://members.iif.hu/visontay/ponticulus/rovatok/hidverok/inmem_tothimre.html (2017. 09. 12.)

Bolyai Nyári Akadémia, 2018 - megnyitó. Az első osztályos Dénes Andrea és Nagy Evelyn Renáta, a Válaszúti Szakiskola, illetve a KZA Mezőségi Szórványkollégium és Oktatási Központ tanulói népdalokat énekelnek.