

Gömbhéjak poligonális horpadási alakjának vizsgálata

Examination of Polygonal Buckling Shapes of Spherical Shells

Studiul pierderii stabilității locale sub forma poligonală ale învelitorilor sferice

VETŐ Dániel¹, SAJTOS István²

¹egyetemi tanársegéd, ²egyetemi docens
BME Szilárdságtani és Tartószerkezeti Tanszék,
1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3., www.szt.bme.hu

ABSTRACT

The paper discusses the buckling of spherical shells. Our goal is to determine the buckling shape of spherical shells subjected to concentrated load. The load-deflection diagram, concerning this case, is also to be determined. It is shown that the buckling shapes with axisymmetry and discrete symmetry of revolution have no direct connection between each other through inextensional deformations. The results of the proposed model, which is able to treat buckling shapes with discrete symmetry of revolution (i.e. polygonal shapes), show good agreement with experiments.

ÖSSZEFOGLALÓ

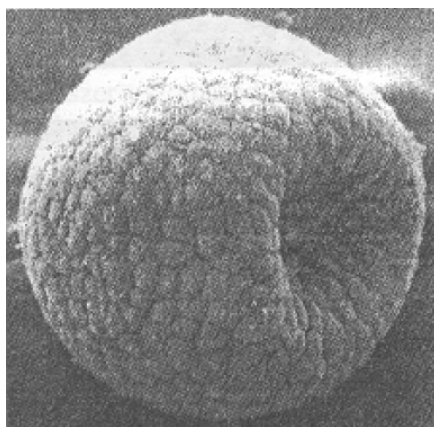
A cikk gömbhéjak horpadásával foglalkozik, célja a koncentrált erővel terhelt gömbhéjak horpadási alakjának meghatározása, illetve a horpadáshoz tartozó teher-elmozdulás összefüggés megállapítása. Bebizonyítottuk, hogy a körszimmetrikus horpadási alak és a diszkrét forgásszimmetrikus (poligonális) horpadási alak nem vihető egymásba a felület nyúlásmentes alakváltozásai segítségével. A cikkben bemutatott, a poligonális horpadási alakok figyelembevételére is alkalmas analitikus modell segítségével kapott eredmények jó egyezést mutatnak a kísérletekben tapasztaltakkal.

Kulcsszavak: héj, gömbhéj, horpadás, poligon, nyúlásmentes alakváltozás

1. BEVEZETÉS

A rugalmas anyagú vékony héjak nagy elmozdulásainak vizsgálata fontos szerepet játszik a mechanikában és más tudományterületeken is. A héjak a felületszerkezetek egy speciális csoportját képviselik. Felületszerkezeteknek nevezzük az egyéb méreteikhez viszonyítva viszonylag kis (általában elhanyagolható) vastagsággal bíró szerkezeteket. Ezen belül héjaknak nevezzük azokat, amelyeknek középfelülete (egy vagy két irányban) görbült [6] [13]. A cikk gömbhéjakkal foglalkozik. Gömb alakú vagy gömbszerű héjak számos kutatási területen előfordulnak. Az építőmérnöki és gépészmérnöki kutatásokban a kupolák, héjszerkezetek, repülőgépek és űrjárművek szerkezeti részei, továbbá tartályok, nyomástartó edények, mikrokapcsolók hangsúlyosan szerepelnek. A nanotechnológiai kutatások során a nanoméretű szerkezetek, a fizikai kémiában a kolloidrészeszkék [26] alakváltozásainak vizsgálata szorosan kötődik a héjelmélethez. A biológiai és orvostudományi alkalmazások száma meglehetősen nagy, például az egyedfejlődés (1. ábra) [9] [19], a biomimetikus polimerhártyák, a vírusok és élő sejtek, a szív és a keringési rendszer vizsgálata során, vagy akár gyógyszerek zárt molekulába való „csomagolása” esetén.

A gömbhéjak horpadásának vizsgálata meghatározó kutatási téma volt a 20. század derekán [13] [16]. Napjainkban újra középpontba került ez a terület a vékony szerkezetek szerepének növekedése és a numerikus számítási technikák fejlődése következtében. A héjak teher-elmozdulás összefüggésének meghatározása nem egyszerű feladat, még jelenleg is jelentős eltérés tapasztalható az elméleti és a kísérleti eredmények között. Ez az eltérés nem csak a geometriai imperfekciók, anyagi nemlinearitás és egyéb, figyelembe nem vett hatások következménye. Az eltérés nagyrészt az elméleti modellek tökéletlenségéből származik.



1. ábra

Tengerisün embrió a sejtosztódás során [9]

A kutatók a közelmúltig általában körszimmetrikus horpadási alakot feltételeztek [7] [16] [25] [30] [35], annak ellenére, hogy a horpadási alak a valóságban sokszor nem körszimmetrikus, hanem sokszög alaprajzú, ahogy számos publikációban [1] [10] [11] [12] [15] [21] [31] [32] látható. A mindennapi életben is számos esetben ez utóbbit látjuk igazolódni, például vékony műanyag csomagolóanyagok vagy akár pingponglabdák horpadása esetén. A publikációk tanúsága szerint a kutatók egyöntetű véleménye az, hogy a gömbhéjak horpadásának vizsgálata még nincs lezárva, a terület további kutatást igényel [1] [32].

Menyhárd héjszerkezetekkel foglalkozó könyvében az a megállapítás szerepel, hogy a héjszerkezetek főként felületükön megoszló terheket hordanak [18]. Bizonyos esetekben, főként kis méretű héjak esetén azonban nagy szerep jut a koncentrált tehernek is, illetve az ennek hatására létrejövő horpadásnak. Kutatásunk célja, hogy a koncentrált erővel terhelt gömbhéjak horpadási alakját meghatározzuk. További cél a koncentrált teherhez tartozó teher-elmozdulás diagram meghatározása. Ezeknek az eredményeknek az eléréséhez analitikus modellt fejlesztünk ki, mely megmutatja a lehetséges horpadási alakokat, és megadja a teher-elmozdulás diagramot. A modell szerint (és a valóságban is) a gömbhéjak először körszimmetrikus horpadási alakot mutatnak a terhelés során, majd a teher növekedésével ez alakul át valamilyen nem-körszimmetrikus (poligonális) horpadási alakká. Kutatásunk során a nem-körszimmetrikus horpadási alakok közül csak a szabályos sokszög alaprajzúakat vizsgáltuk, melyeket diszkrét forgásszimmetrikusnak nevezünk.

Számos kutatási eredményt találhatunk koncentrált erővel terhelt gömbhéjakra vonatkozóan az irodalomban, melyek diszkrét forgásszimmetrikus, általában szabályos sokszög alaprajzú horpadási alak feltételezésével születtek. Bár lényegében ugyanazt a jelenséget tárgyalják, az eredmények néha egészen eltérőek. A diszkrét forgásszimmetrikus horpadási alakkal foglalkozik Pogorelov [24], és kritikus terhet állapít meg a horpadási alak körszimmetrikusból diszkrét forgásszimmetrikussá változásához. Bushnell [4] és Penning [22] azt állítják, hogy a horpadási sokszög oldalainak száma három, négy vagy öt lehet. Ezen sokszögek megjelenésének sorrendje a terhelés növekedésével szerintük alapvetően ez, de – ahogy állítják – a kísérletek ennek némileg ellentmondanak. Fitch [8] szerint a horpadási sokszög jellemzően nem változik a terhelés során, a létrejövő sokszög a héj relatív vastagságától (sugár-vastagság arányától) függ: vastagabb héjak ötszög alakot (vagy esetleg körszimmetrikus alakot) mutatnak, vékonyabb héjak esetén három- vagy négyszöget láthatunk. Tarnai [29] nagyon vékony héjat (melyben egy belső merev gömb is található) vizsgál belső vákuum-terhelésre. Ez nem az az eset, amelyet a kutatók nagy része vizsgál, de érdemes megemlíteni az összetett, a héj egész felületére kiterjedő, öt- és hatszögekből álló, méhsejtekhez hasonló mintázata miatt. Pauchard és Rica [21] a koncentrált teherrel terhelt gömbhéjakat vizsgálja, és a megállapításuk az, hogy a horpadási alak a következőképpen változik a terhelés növekedésével: kör, ellipszis, háromszög, négyszög, ötszög. Galpin, Grolleau és szerzőtársaik [10] [11] azt állítják, hogy a horpadási sokszögek megjelenésének oka a gyártás során kialakuló anyagi anizotrópia. Vaziri és szerzőtársa [31] [32] azt állítja, hogy a sokszögek megjelenésének sorrendje nagyjából ugyanaz, mint Pauchard és Rica cikkében (kivéve az ellipszist) [21]. Zárt képletet is adnak az egyes sokszögek megjelenéséhez tartozó elmozdulásra vonatkozóan, mely tartalmazza a héj relatív vastagságát (sugár-vastagság arányát). A merev lappal történő nyomás esetét is tárgyalják, állításuk az, hogy vastagabb héjagnál csak ötszöget, vékonyabb héjagnál csak négyszöget láthatunk. Quilliet és szerzőtársai [26] nagyon kis méretű gömbhéjakat (kolloidrészcskéket) vizsgálnak, melyeket belső vákuum-terhelésnek vetnek alá. A felületen létrejövő mintázat a relatív vastagságtól függ. Knoche és Kierfeld [15] három különböző horpadás-fajtát különböztet meg egy gömbhéj terhelése során: az úgynevezett elsődleges horpadást (ehhez tartozik az alsó kritikus teher), az úgynevezett klasszikus horpadást (ehhez tartozik a felső kritikus

teher) és az úgynevezett másodlagos horpadást. Az első két horpadás (elsődleges és klasszikus) teherszintjei között a héj lehet horpadt (ekkor a horpadás még csak körszimmetrikus lehet) és horpadásmentes állapotban is. Az utolsó horpadáshoz (másodlagos) tartozó teherszint felett a héj már biztosan horpadt állapotban van, és ez biztosan nem-körszimmetrikus horpadási alakot jelent. Mindezeket összevetve kijelenthető, hogy a gömbhéjak horpadásának vizsgálata még mindig aktuális, hiszen sok alapvető kérdésre nincs válasz, illetve jelentősen eltérő megállapítások lehettek fel az irodalomban.

2. NYÚLÁSMENTES (IZOMETRIKUS) ALAKVÁLTOZÁSOK

Kutatásunk során Pogorelov, a 20. század híres ukrán matematikusa által használt geometriai módszert vettük alapul. A kutató az 50-es évek derekán dolgozta ki módszerét, melynek során a horpadási alakot az eredeti héjfelület izometrikus transzformáltjaként határozza meg, és ennek segítségével állapítja meg a horpadási terhet. Az izometrikus transzformáció fogalmának meghatározásához fontosnak tartjuk a felületekkel kapcsolatos néhány alapvető jelenség leírását.

A felületek alakváltozása általános esetben nyújtásból és hajlításból tevődik össze. A nyújtás a felületen mérhető ívhosszak (pozitív vagy negatív előjelű) megváltozását jelenti. Azokat az alakváltozásokat, amelyek a felületen mérhető ívhosszakat nem változtatják meg, izometrikus transzformációnak vagy nyúlásmentes alakváltozásnak nevezzük. A hajlítás a felület görbületeinek (pozitív vagy negatív előjelű) megváltozását jelenti. A hajlítás bekövetkezhet nyúlásmentes alakváltozások esetén is: ez annak a következménye, hogy a felületen mérhető ívhosszak a felület ún. belső geometriai jellemzőivel kifejezhetők [13].

Általános esetben az alakváltozások mindkét fajtája (azaz nyújtás és hajlítás) egyidejűleg létrejön egy felület deformálásakor, de valójában a héjak esetén sokszor csak hajlítást láthatunk a felület jelentős részén. Ennek magyarázata a vékony szerkezetek mechanikájában keresendő: a nyújtással szembeni merevség (K_s) és a hajlítással szembeni merevség (K_b) eltérően függ a héj vastagságától:

$$K_s = \frac{Et}{1-\nu^2}, \quad (1)$$

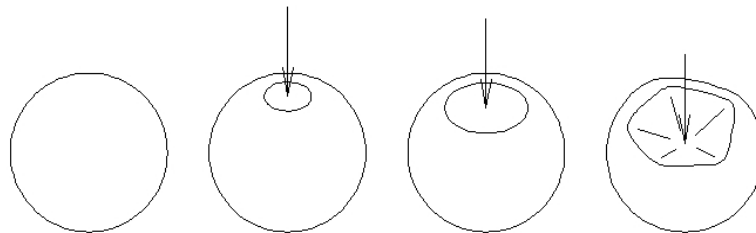
$$K_b = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}. \quad (2)$$

A fenti képletekben E a Young-modulus, t a héj vastagsága, ν a Poisson-tényező. Látható, hogy $t \rightarrow 0$ esetén $K_b / K_s \rightarrow 0$, tehát a héj vastagságának csökkenése esetén a nyújtással szembeni merevség előtérbe helyeződik a hajlítással szembeni merevséghez képest. Ez azt okozza, hogy egy vékony héjban nyúlások nem következnek be, mert ez túl sok energiát emésztene fel [27], így tehát az alakváltozások nyúlásmentesek maradnak.

A nyúlásmentes alakváltozásokkal kapcsolatosan az irodalomban sok érdekes és lényeges megállapítás olvasható. A héjak horpadása szempontjából talán a legfontosabb az úgynevezett geometriai merevséggel kapcsolatos, mely szerint az infinitezimálisan vékony felületek két csoportra oszthatók: geometriailag merev és nem merev felületekre. Egy felület geometriailag merev, ha nem létezik olyan (folytonos) alakváltozás-rendszer, amely a felületen létre tud jönni a kiindulási geometriából. Például ilyen a zárt teljes gömbfelület. Ennek alakja csak úgy tud megváltozni, ha a felületet egy síkkal metsszük, és a lemetezett részt „tükrözzük” erre a síkra. Ekkor létrejön egy olyan alak, amely bár nyúlásmentes, de nem érhető el közvetlenül a kiindulási alakból, hanem csak a felület egy részének nyúlással járó alakváltozásán keresztül. Nyilvánvaló, hogy azok a felületek, amelyek nem tartoznak a geometriailag merev felületek csoportjába, geometriailag nem merevek. Például ilyen egy sík lap. Ennek számos, a nyúlásmentes alakváltozások körébe tartozó állapota hozható létre folytonosan.

A valóságban a héjak véges vastagsággal rendelkeznek (tehát nem infinitezimálisan vékonyak), ezért az alakváltozások nem mindig tudnak nyúlásmentesek maradni: tipikusan lokálisan nyúlásmentes vagy kvázi-nyúlásmentes alakváltozásokat láthatunk. A valóságban csak a geometriailag merev felületek esetén tudnak ténylegesen nyúlásmentes (izometrikus) alakváltozások létrejönni. A geometriailag merev valódi felületek, például a zárt teljes gömbfelület, sokszor csak lokálisan nyúlásmentes (lokálisan izometrikus) alakváltozásokat mutatnak. Ez azt jelenti, hogy a felület csaknem teljes egésze nyúlásmentes állapotban marad, kivéve a felület viszonylag kis részét, ahol viszonylag nagy nyúlások jönnek létre [14] [25]. Gömbfelület esetén ez annak az állapotnak felel meg, amikor a felület egy része kilapul, de még nem „pattan át” a gömb középpontja felé (egy pingponglabda segítségével könnyen vizsgálható ez az állapot, mely viszonylag kis benyomódáshoz tartozik). Egyéb esetekben sokszor a geometriailag merev valódi felületeken egyidejűleg következik be nyúlás és hajlítás, azonban a felület különböző részein különböző a nagyságrendje ezeknek az alakváltozásoknak. A felület nagy részén jellemzően hajlítási alakváltozásokat láthatunk, nyúlások nélkül, de van néhány él vagy csúcs, amelyekben a nyúlások

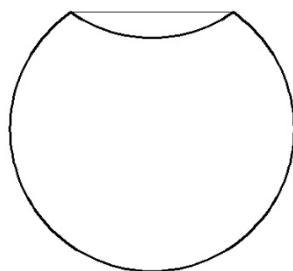
dominálnak (2. ábra). Ezt az állapotot kvázi-nyúlásmentesnek (kvázi-izometrikusnak) nevezzük (a kvázi-nyúlásmentes alakváltozások henger- és hiperboloid-héjaknál is előfordulnak [5]). Az ehhez az állapothoz tartozó alak gömbhéj esetén lehet körszimmetrikus vagy diszkrét forgásszimmetrikus is.



2. ábra

Geometriailag merev valódi felület (zárt teljes gömbfelület) lehetséges alakváltozásai

A fentiek szerint tehát egy héjnak többféle kvázi-nyúlásmentes alakváltozási állapota is létrejöhet. A kísérletek során [34] azt tapasztalhatjuk, hogy a körszimmetrikus horpadási alakból alakul ki a benyomódások növekedése során a diszkrét forgásszimmetrikus horpadási alak. Felmerül a kérdés, hogy ezek között az állapotok között van-e közvetlen átjárás a kvázi-nyúlásmentes alakváltozások körén belül. Ha infinitezimálisan vékony héjakat tekintünk, akkor a kérdés megfogalmazható úgy, hogy képes-e egy teljes gömbfelületből egy sík mentén történő elmetszéssel képzett, a körszimmetrikus horpadási alaknak megfelelően egymásba illesztett két gömbsüveg-felület nyúlásmentes alakváltozásokra olyan módon, hogy az egymáshoz csatlakozó peremük mentén nem alakul ki elmozdulás-különbség közöttük (3. ábra). A kérdés Niordson héjelméleti könyve alapján [20] viszonylag egyszerűen megválaszolható.



3. ábra

Egymásba illesztett két gömbsüveg-héj metszete

Egy gömbsüveg-héj peremének a felület nyúlásmentes alakváltozásaihoz tartozó elmozdulásai a következőképpen fejezhetők ki:

$$w^* = \left(A_m (m + \cos \theta) \tan^m \frac{1}{2} \theta \right) \cos m \phi, \quad (3)$$

$$u = \left(-A_m \tan^m \frac{1}{2} \theta \right) \sin \theta \cos m \phi, \quad (4)$$

$$v = \left(-A_m \tan^m \frac{1}{2} \theta \right) \sin \theta \sin m \phi, \quad (5)$$

ahol w^* , u és v jelentik (a könyv szerinti jelöléseket alkalmazva) a normál- és az érintőirányú elmozdulásokat, A_m tetszőleges konstans (felfogható úgy is, mint az elmozdulások amplitúdója), θ jelenti a gömbsüveg meridiánirányhoz tartozó szögét, ϕ a gyűrűirányhoz tartozó szöveget, m pedig az alakváltozás gyűrűirányban kialakuló hullámszámához tartozó, 1-nél nagyobb egész szám. Ha azt szeretnénk, hogy a két egymáshoz csatlakoztatott gömb-

süveg-héj peremének elmozdulásai között ne legyen különbség, akkor a következő egyenlőségeknek kell fennállniuk:

$$A_{m,1}(m + \cos \theta_1) \tan^m \frac{1}{2} \theta_1 = A_{m,2}(m + \cos \theta_2) \tan^m \frac{1}{2} \theta_2, \quad (6)$$

$$-A_{m,1} \tan^m \frac{1}{2} \theta_1 \sin \theta_1 = -A_{m,2} \tan^m \frac{1}{2} \theta_2 \sin \theta_2, \quad (7)$$

ahol $A_{m,1}$ és $A_{m,2}$, illetve θ_1 és θ_2 a két gömbsüveg-héjhoz tartozó értékeket jelentik. A (7) egyenlőség felírásakor kihasználtuk azt, hogy az u és v elmozdulások (4) és (5) kifejezése csak egy ϕ -től függő tényezőben tér el egymástól, így az ezekben az irányokban értelmezett elmozdulások különbségének zérus voltát a (7) egyenlőség fennállása egymagában biztosítja. A (6) és (7) egyenlőség felírható a következő, $A_{m,1}$ -re és $A_{m,2}$ -re rendezett egyenletrendszer formájában is:

$$\begin{bmatrix} (m + \cos \theta_1) \tan^m \frac{1}{2} \theta_1 & -(m + \cos \theta_2) \tan^m \frac{1}{2} \theta_2 \\ -\tan^m \frac{1}{2} \theta_1 \sin \theta_1 & \tan^m \frac{1}{2} \theta_2 \sin \theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{m,1} \\ A_{m,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

mely annak kihasználásával, hogy a gömbsüvegek ugyanazon gömbből való elmetszéssel képződtek (azaz $\theta_1 + \theta_2 = \pi$) a következőképpen is felírható:

$$\begin{bmatrix} (m + \cos \theta_1) \tan^m \frac{1}{2} \theta_1 & -(m + \cos \theta_1) \cot^m \frac{1}{2} \theta_1 \\ -\tan^m \frac{1}{2} \theta_1 \sin \theta_1 & \cot^m \frac{1}{2} \theta_1 \sin \theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{m,1} \\ A_{m,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Ez az egyenletrendszer akkor ad a triviálisól eltérő megoldást, ha az együtthatómátrix determinánsa zérus. E determináns könnyen meghatározható, melyet 0-val egyenlővé téve a következő, m -től független kifejezés adódik:

$$\theta_1 = \frac{k\pi}{2}, \quad (10)$$

ahol k pozitív egész szám. Ez az eredmény azt jelenti, hogy a körszimmetrikus horpadási alaknak megfelelően egymásba illesztett, ugyanazon gömbből való elmetszéssel képzett két gömbsüveg-héj (a fizikailag lehetséges eseteket számításba véve) kizárólag abban az esetben képes a peremek közötti elmozdulásmentességet megőrző nyúlásmentes alakváltozásra, ha a hozzájuk tartozó meridián-irányhoz tartozó szög $\pi/2$ (azaz két félgömbről van szó). Tehát általában nem alakulhat ki az a nyúlásmentes alakváltozás, amelynek során a peremek egymáshoz viszonyítva elmozdulásmentesek maradnak. Ez olyan eredmény, amelyet a mérnöki intuíció alátámaszt, de a mérnöki héjelméleti kutatások során tudomásunk szerint még nem vizsgálták.

A fentieknek megfelelően megállapítható, hogy a körszimmetrikus és a diszkrét forgásszimmetrikus horpadási alak általában nem vihető egymásba nyúlásmentes alakváltozásokon keresztül. Tehát a kísérletekben látható diszkrét forgásszimmetrikus (poligonális) horpadási alakok vizsgálati modellekben történő figyelembevételére szükség van, mert csak valamilyen teher-szint-változás tudja előidézni azt a nyúlással járó alakváltozást, ami ezeknek az alakoknak a létrejöttéhez szükséges. Másképp megfogalmazva: a diszkrét forgásszimmetrikus horpadási alakhoz tartozó teher-elmozdulás összefüggés szükségszerűen eltér a körszimmetrikus horpadási alakhoz tartozó összefüggéstől.

3. ALKALMAZOTT FELTÉTELEZÉSEK, MÓDSZEREK

A héjak horpadása esetén nagy elmozdulásokról és nagy alakváltozásokról beszélhetünk, legalábbis a felület bizonyos részein. Ha olyan módon gondolkodunk, hogy nem közvetlenül az elmozdulásokat és a belőlük (deriválással) származtatott alakváltozásokat használjuk fel egyenleteinkben, akkor az elmozdulások és az alakváltozások nagysága nem okoz különösebb számítási nehézségeket. Ezt teszi lehetővé az energiamódszer. Az energiamódszer alapja a szerkezet teljes potenciális energiájára vonatkozó stacionaritási (állandóértékűségi) tétel:

$$\frac{\partial W}{\partial u_i} = 0, \quad (11)$$

ahol W a teljes potenciális energia funkcionálját, u_i pedig a lehetséges elmozdulás-változókat jelöli. A szerkezet akkor van egyensúlyban, ha a teljes potenciális energia funkcionálja szélsőértéket vesz fel, tehát a lehetséges elmozdulás-változók szerinti első variációi zérus értékűek. Az egyensúlyi helyzet akkor stabil, ha a második variációk zérusnál nagyobbak, tehát a szélsőérték lokális minimumot jelent:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u_i^2} > 0. \quad (12)$$

Megjegyzendő, hogy a (12) kifejezésben szereplő egyenlőtlenség teljesülése csak szükséges, de nem elégséges feltétele a minimum létezésének: a második variációkból képzett úgynevezett Hesse-mátrix determinánsa is nagyobb kell, hogy legyen zérusnál. A gömbhéjak poligonális horpadási alakjának vizsgálata során numerikus módszert használunk a szélsőérték-keresésre, így a Hesse-mátrix vizsgálata elmarad.

A teljes potenciális energia a szerkezet – adott alakhoz tartozó – alakváltozási energiájából és az elmozdulás során a terhek által végzett munkából számítható ki. Pogorelov jelöléseit használva [25] a kifejezés a következő:

$$W = U - A, \quad (13)$$

ahol U az alakváltozási energia, A a terhek által végzett munka. Ezek meghatározásához nyilvánvalóan szükség van bizonyos elmozdulások és alakváltozások ismeretére, de ezeket elegendő csak az adott egyensúlyi állapotra vonatkozóan ismerni, nem kell az ehhez vezető „utat” leírni. Az energiamódszer további előnye még, hogy ha az alakváltozott alak több elmozdulás-paraméterrel jellemezhető, akkor is egyszerűen kezelhető marad.

A vizsgálatok során teljes gömbbel foglalkozunk, az imperfekciókat (kezdeti pontatlanságokat) figyelmen kívül hagyjuk, vékony héjat vizsgálunk (a gömb vastagságának és sugarának hányadosa kicsi), lineárisan rugalmas, homogén, izotrop anyagot feltételezünk. A héj terhelése koncentrált teher, mely tükörszimmetriával rendelkezik (azaz a teljes gömb mindkét felén működik, egymással ellentétes irányban), a horpadás során létrejövő elmozdulásrendszert elforgatási szimmetriával rendelkezőnek feltételezzük. Ez az elforgatási szimmetria lehet folytonos, vagy diszkrét forgásszimmetria (és ezzel egyidejűleg tükörszimmetria). Előbbi eset jelenti a kör alakú horpadási élt, utóbbi pedig a poligonálisat, amely jelen cikkben síkbeli szabályos sokszög.

4. MODELL LEÍRÁSA

A gömbhéj horpadási alakját sok kutató körszimmetrikusnak feltételezte a vizsgálataik során [7] [16] [25] [30] [35]. Ez a körszimmetrikus horpadási alak az eredeti héjfelület kvázi-izometrikus transzformáltjának tekinthető, mert a kör alakú horpadási élen kívül eső részen nincs alakváltozás, az élen belüli részen pedig csak hajlítási alakváltozás alakul ki (az eredeti görbületek ellentettjei alakulnak ki ezen a felületrészen). Nyúlások csak a horpadási él környezetében jelentkeznek, de ez a héj felületének csak nagyon kis részére korlátozódik. A körszimmetrikus horpadási alakhoz tartozó vizsgálatok eredményeit [33] [34] tartalmazza.

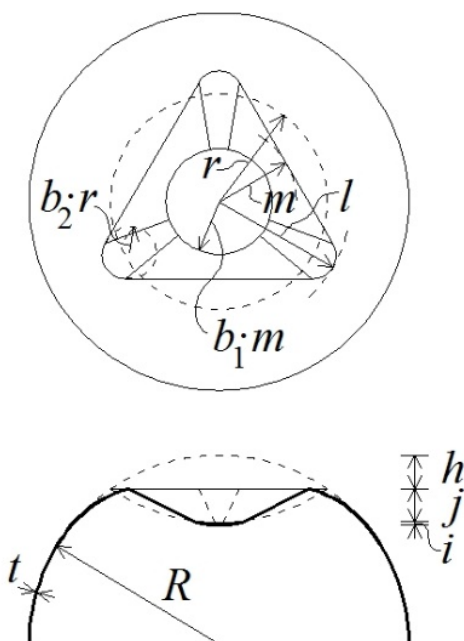
Kísérletekben tapasztalható tény, hogy a gömbhéjak horpadt alakját általában nem kör alakú él jellemzi, hanem valamilyen sokszöghöz hasonló. A kísérletek azt mutatják, hogy kis benyomódások esetén kör alakú horpadási él alakul ki, majd a benyomódások növekedése során ebből keletkezik a sokszöghöz hasonló alak. A 2. fejezetben leírtak alapján belátható, hogy ezeknek a horpadási alakoknak a figyelembevételre indokolt. Kutatásunk során a Pogorelov-féle, kizárólag körszimmetrikus horpadási alakok vizsgálatára alkalmas modellt továbbfejlesztettük, kiterjesztettük az alkalmazhatóságát diszkrét forgásszimmetrikus horpadási alakokra is. A modellt Pogorelov [23] [25], Audoly, Ben Amar és Pomeau [1] [2], továbbá Lobkovsky [17], Pauchard és Rica [21], illetve Calladine és szerzőtársai [35] alapján dolgoztuk ki [34]. A sokszöghöz hasonló alakú horpadási éllel kapcsolatosan az irodalomban az a két leggyakoribb feltételezés, hogy síkbeli és szabályos. A cikkben mi is ezeket a feltételezéseket használjuk. Az első feltételezés, mely arra vonatkozik, hogy a horpadási él síkbeli, horpadt héjakat vizsgálva szemmel láthatóan nagyon közel áll a valósághoz. A második feltételezés, mely arra vonatkozik, hogy a horpadási él szabályos sokszög, az esetek nagy részében szintén magától értetődőnek tűnik, azonban az esetek kis részében a héj nem szabályos sokszögnek megfelelő horpadási alakot vesz fel. Ezen eseteket a cikkben nem vizsgálom, a téma további kutatást igényel.

A sokszög csúcsai kis mértékben mindig lekerekítettek. Ezeket a lekerekítéseket sokszor figyelmen kívül hagyjuk, képzeletünkben könnyen meghosszabbítjuk az éleket, hogy metszéspontot kapjunk. Ez az irodalomban fellelhető modellekben is így szerepel, tehát a kutatók figyelmen kívül hagyják azt, hogy a valóságban nem jelen-

nek meg a sokszög csúcsai. Véleményünk szerint azonban ezt valamilyen módon figyelembe kell venni. A következőkben bemutatott modellben a sokszögek nem csúcsosan jelennek meg, hanem valamilyen lekerekített alakzatot láthatunk.

A horpadási élen belüli részen elhelyezkedik egy úgynevezett belső kör, mely által körülhatárolt felületrész az eredeti gömbfelület inverziójával, tükrözésével nyerhető (így az eredeti gömbfelület egy részének izometrikus transzformáltja). Ennek a belső körnek az átmérője kisebb vagy egyenlő, mint a horpadási él sokszögébe írható kör átmérője. A belső kör és a horpadási sokszög közötti felületrészekon kvázi-izometrikus alakváltozás tapasztalható, mely lehetővé teszi, hogy a két él közötti részen közelítőleg nyúlásmentes maradjon a felület. A horpadási sokszögon kívül is található egy kvázi-izometrikus alakváltozásokkal jellemezhető rész, mely lehetővé teszi, hogy a sokszög alakú él és a horpadás során alakváltozásokat nem szenvedő felületrészek közötti részen is közelítőleg nyúlásmentes maradjon a felület.

Az alak paraméterei: h a héj tetőpontja és a horpadási alakzat síkja közötti távolság, n a (szabályos) sokszög oldalainak száma, b_1 a horpadási élen belüli rész lekerekítettségét kifejező szám, b_2 a horpadási él lekerekítettségét kifejező szám. A modell szerinti horpadt héj felülnézetét és metszetét a 4. ábrán láthatjuk. Az ábrán látszik, hogy a teljes benyomódás – a horpadt részek alakjából következően – nem feltétlenül egyenlő $2h$ -val, hanem $h + j + i$ adja meg. Megjegyzendő, hogy speciális esetként ebben a modellben is előállhat a körszimmetrikus alak, ekkor a teljes benyomódás nagysága éppen $2h$ -val egyenlő ($j + i = h$), illetve $b_1 = b_2 = 1$. A teljes benyomódás meghatározásához szükséges j és i értéket az alak paramétereiből származtatjuk: j a horpadási alakzat síkja és az ezen belül elhelyezkedő belső kör síkja közötti távolság, i pedig az említett belső körön belüli (inverz) gömbsüvegrész magassága. Ha $b_1 = 0$, akkor a horpadási alakzat a horpadási élen belüli részen teljesen csúcsos (egy csúcsban futnak össze a horpadt részek), ha $b_1 = 1$, akkor teljesen lekerekített (az eredeti gömbi geometriával rendelkezik). Ha $b_2 = 0$, akkor maga a horpadási él teljesen csúcsos (azaz sokszög alakú), ha $b_2 = 1$, akkor lekerekített (azaz kör alakú). A modell így lehetővé teszi a körszimmetrikus és a diszkrét forgásszimmetrikus alakok közötti folytonos átmenet követését, hiszen a b_1 és b_2 paraméterek a $[0;1]$ zárt intervallum bármely értékét felvehetik. Az általunk az irodalomban fellelt modellekben ritka az ilyen átmenet lehetővé tétele [24], szinte minden publikáció a körszimmetrikus alaktól teljesen különálló esetekként kezeli a diszkrét forgásszimmetrikus alakokat, ezeket a héj csak hirtelen „ugrással”, folytonos átmenet nélkül tudja elérni. A kísérletek során sokszor azt láthatjuk, hogy a terhelés során a körszimmetrikus horpadási alakból lassan, jól megfigyelhető „fejlődéssel”, fokozatosan alakul ki a diszkrét forgásszimmetrikus (sokszög alaprajzú) horpadási alak, így ennek lehetővé tétele nyilvánvalóan a modellt pontosítja.



4. ábra

Diszkrét forgásszimmetrikus horpadási alak felülnézete, metszete

A modellben szereplő héj horpadása során létrejövő egyensúlyi helyzeteket energiamódszerrel keressük. A módszer alkalmazásakor a horpadt héjban keletkező alakváltozási energia meghatározására is szükség van, ehhez a horpadt héjfelületet a 4. ábrán is látható, élek által határolt részekre lehet osztani. A modellben összesen 8 különböző típusú rész alakváltozási energiáját vesszük figyelembe, ez az egyes felülrészek nyúlási és hajlítási alakváltozási energiájából, a horpadási élek mentén keletkező vonalmenti, szintén nyúlási és hajlítási alakváltozási energiájából, illetve a csúcokban keletkező alakváltozási energiából tevődik össze.

A felülrészekben keletkező nyúlási és hajlítási alakváltozási energiát a következő általános kifejezés segítségével határoztam meg:

$$U = \int_S \frac{Et}{2(1-\nu^2)} (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + 2\nu\varepsilon_1\varepsilon_2) dS + \int_S \frac{Et^3}{24(1-\nu^2)} (\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + 2\nu\kappa_1\kappa_2) dS \quad (14)$$

ahol U az adott felülrész alakváltozási energiája, E a Young-modulus, t a héj vastagsága, ν a Poisson-tényező, ε_1 és ε_2 a főnyúlások, κ_1 és κ_2 a fő-görbületváltozások, és a kifejezés mindkét tagját az adott felülrész S felszínén integráltuk. A nem horpadt felülrészekben is figyelembe vettük a nyúlási alakváltozási energiát (membránalakváltozási energia).

A felülrészeket határoló, azokat összekapcsoló élek mentén a Pogorelov könyvében [25] olvasható, a kör-szimmetrikus esetenél is előkerülő kifejezést használtuk Calladine és szerzőtársai [35] által módosított formában:

$$U = cEt^{2,5} \frac{\alpha^2 l}{R^{0,5}}, \quad (15)$$

ahol U az adott él alakváltozási energiája, $c = 0,19$ dimenzió nélküli konstans [25], α az adott él két oldalához csatlakozó felülrészek (élnél felvett) érintősíkjai által bezárt szög, l az él hossza, R a gömb sugara.

A horpadt héjon megjelenő élek csatlakozási pontjai csúcokat alkotnak, ahol további alakváltozási energiárészeket kell figyelembe venni. Az eredetileg gömbi geometriával rendelkező felülrészek gyűrődésekor keletkező csúcokat – melyek nem jöhetnek létre izometrikus alakváltozás során, tehát nyúlási energia is keletkezik bennük a hajlítási alakváltozási energia mellett – úgynevezett s-kúpokkal közelítjük (az eredetileg sík felülrészek gyűrődésekor keletkező csúcok esetén a d-kúp elnevezés használatos) [1] [2]. A keletkező alakváltozási energiát közelítő kifejezés segítségével határoztuk meg.

A nyúlási alakváltozási energiárészek a felülrészek esetében nem jelentősek, az élek és csúcok mentén azonban meghatározó szerepük van, akárcsak Pogorelov modelljében [25]. A teher által végzett munka a kör-szimmetrikus esethez hasonlóan számíthatók.

A számításokat MATLAB 7.11.0 program segítségével végeztük, az egyensúlyi helyzetek keresése a beépített többváltozós minimumkeresési algoritmussal (fminsearchbnd) történt. Egy-egy számításkor rögzítettük a sokszög oldalainak (vagy csúcainak) számát (n), hiszen ez csak az egész számok körében értelmezhető. A horpadási alakot megadó többi változót (h , b_1 , b_2), illetve a teherintenzitást (f) a fizikailag lehetséges illetve vizsgálni érdemes tartományokban vettük fel.

A kísérletekkel való könnyű ellenőrizhetőség miatt a modellt elsősorban kétféle gömbhéj vizsgálatára használtuk. A vizsgálatokban a pingponglabda (anyaga: celluloid, Young-modulusa: $E = 2400 \text{ N/mm}^2$, Poisson-tényezője: $\nu = 0,3$, vastagsága: $t = 0,37 \text{ mm}$, sugara: $R = 19,5 \text{ mm}$) és egy nagyobb átmérőjű műanyag héj, a Lénárt István matematikus által rendelkezésünkre bocsátott úgynevezett Lénárt-gömb (anyaga: polietilén, Young-modulusa: $E = 2550 \text{ N/mm}^2$, Poisson-tényezője: $\nu = 0,3$, vastagsága: $t = 0,42 \text{ mm}$, sugara: $R = 102 \text{ mm}$) szerepelt. A geometriai méreteket több pingponglabda és Lénárt-gömb mérésének átlagaként vettük fel. Az anyagállandókat (E , ν) nem saját mérésekkel határoztuk meg, hanem az irodalomban [3] [28] található átlagos értékek szerint vettük fel. A kétféle héj sugár-vastagság (R/t) aránya közel egy nagyságrenddel eltér egymástól: a pingponglabdához 52,70, a Lénárt-gömbhöz 242,86 tartozik.

5. EREDMÉNYEK

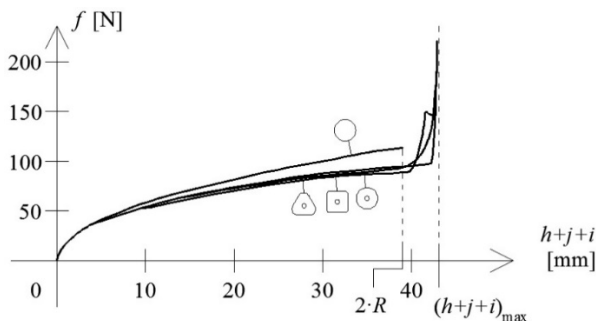
A pingponglabdára vonatkozó teher-elmozdulás diagram az 5. ábrán, a lekerekítettség-elmozdulás diagram a 6. ábrán látható. A Lénárt-gömb teher-elmozdulás diagramja a 7. ábrán, a lekerekítettség-elmozdulás diagram a 8. ábrán látható.

A teher-elmozdulás diagramokon (5. és 7. ábrák) jól látható, hogy kisebb elmozdulás (benyomódás) esetén a modell és a Pogorelov-féle, csak körszimmetrikus horpadási alak figyelembevételére képes modell egyezik (az általunk használt modell visszaadja a Pogorelov-féle eredményeket). Nagyobb elmozdulás esetén azonban tapasztalható némi eltérés: a diszkrét forgásszimmetrikus horpadási alakokhoz tartozó ágak jól láthatóan lejjebb helyez-

kednek el a diagramon, mint a körszimmetrikushoz tartozó, ez magyarázza azt is, hogy a héjnak miért „éri meg” ezeket az ágakat választani.

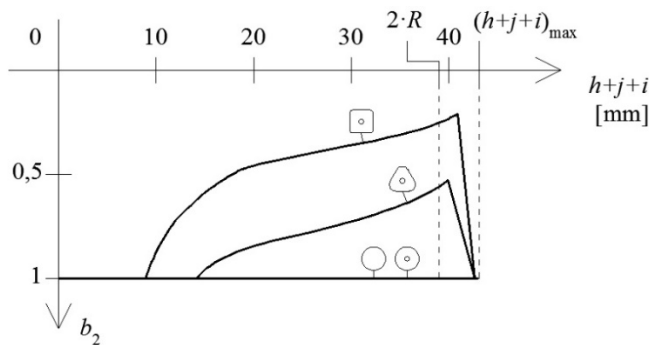
A lekerekítettség-elmozdulás diagramokon (6. és 8. ábrák) az látszik, hogy a diszkrét forgásszimmetrikus horpadási alakokhoz tartozó ágak bizonyos benyomódási értékeknél hogyan ágaznak le a körszimmetrikushoz tartozó ágról. Maga a leágazás egy tisztán látható elmozdulás-értéknél történik – ilyen módon igazolhatók az irodalomban olvasható feltételezések arra vonatkozóan, hogy a diszkrét forgásszimmetrikus alakok megjelenéséhez mindig köthető egy bizonyos elmozdulás-érték –, azonban a leágazást csak később (az elmozdulás további növekedésekor) követi a sokszög teljes kifejlődése. Így tehát a sokszög megjelenéséhez tartozó elmozdulás értékének meghatározása inkább elméleti jelentőségű, a valóságban ilyenkor még nem látszik semmi körtől való eltérés a horpadt alakon. Mindenesetre újdonság, hogy a kör és a sokszög közötti átmenetet ilyen módon mutatja egy viszonylag egyszerű modell, mert szinte minden publikáció a körszimmetrikus alaktól teljesen különálló esetekként kezeli a diszkrét forgásszimmetrikus alakokat [8] [31] [32]. Még Pogorelov korábbi művében [24] is, ahol a diszkrét forgásszimmetrikus alaknak van olyan paramétere, amely lehetővé teszi az alakzat lekerekítettségének változását, a héj csak hirtelen „ugrással”, folytonos átmenet nélkül lép át a poligonális alakra.

A diagramokon megfigyelhető, hogy többféle diszkrét forgásszimmetrikus alakhoz tartozó ág létezik. Kérdésként merül fel, hogy a héj ezek közül melyiket választja. A pingponglabda esetén csak (szabályos) három- és négyszöghöz tartozó egyensúlyi utakat látunk a körszimmetrikus alakot leszámítva. Más sokszöghöz tartozó ág nem fordul elő. A három- és négyszöghöz tartozó ág egymáshoz nagyon közel helyezkedik el a teher-elmozdulás diagramon (5. ábra), de viszonylag messze helyezkednek el egymástól a lekerekítettség-elmozdulás diagramon (6. ábra). Ez arra utal, hogy a héj horpadás során vagy csak az egyik, vagy csak a másik sokszöghöz tartozó alakot veszi fel, a kettő között (ebben a modellben) nincs közvetlen átjárás. A Lénárt-gömb esetén csak (szabályos) öt- és hatszöghöz tartozó egyensúlyi utakat látunk a körszimmetrikus alakot leszámítva. Más sokszöghöz tartozó ág nem fordul elő. Az öt- és hatszöghöz tartozó ág egymáshoz nagyon közel helyezkedik el a teher-elmozdulás diagramon (7. ábra) és a lekerekítettség-elmozdulás diagramon (8. ábra) is. Ez arra utal, hogy a héj horpadás során könnyen válthat a két különböző sokszöghöz tartozó alak között. A két különböző konfigurációt megjelenítő ág között (ebben a modellben) elvileg nincs közvetlen átjárás. Gyakorlatilag azonban a modellben alkalmazott közelítések pontatlansága miatt a két ágot egybeesőnek feltételezhetjük. A pingponglabdára és a Lénárt-gömbre kapott eredményeket a kísérletek és végeselemes vizsgálatok is igazolják [34].



5. ábra

Pingponglabda teher-elmozdulás diagramja



6. ábra

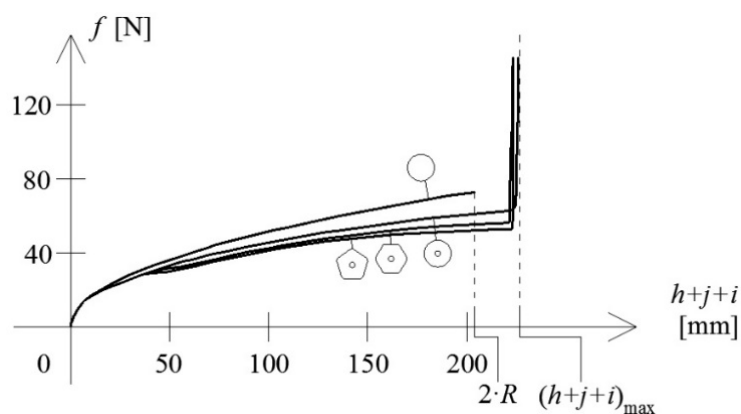
Pingponglabda lekerekítettség-elmozdulás diagramja

Vaziri és szerzőtársa [31] [32] szerint a háromszögtől kezdve a szabályos sokszögek teljes sora megjelenik a horpadás során minden gömbhéj esetén. Ezt az általunk elvégzett vizsgálatok nem igazolják: a lehetséges sokszögek közül nem mindegyik jelenik meg egy adott héj esetén. Az említett kutatók szerint a nagyobb R/t aránnyal rendelkező héjak esetén az egyes sokszögek megjelenéséhez (tehát a körből vagy az alacsonyabb oldalszámú sokszögből történő átalakuláshoz) kötődő benyomódási értékek kisebbek, mint a kisebb R/t aránnyal rendelkező héjak esetén. Tehát a nagyobb sugár-vastagság arányú héjak esetén az értelmezési tartomány nagyobb részén látunk nagyobb oldalszámú sokszögeket, mint a kisebb sugár-vastagság arányú héjak esetén. Ezt igazolják az általunk a pingponglabdára és a Lénárt-gömbre kapott eredmények.

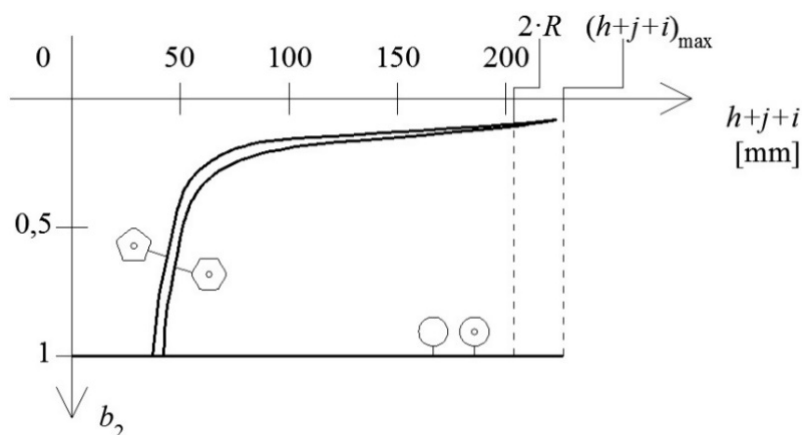
Az 5., 6., 7. és 8. ábrákon a lehetséges legnagyobb benyomódásokat is jelöltük. Ez ahhoz az állapothoz tartozik, amelynél a horpadási él kör alakú ($b_2 = 1$), $r = R$ sugarú, de az ezen belül található rész csúcsos ($b_1 = 0$). Ebben az esetben a héj önmagát átmetszi, tehát a meghatározása elméleti jelentőségű, kísérletek során nem jöhet létre. A lehetséges legnagyobb benyomódás:

$$(h+i+j)_{\max} = R \left(1 + \sqrt{\frac{\pi^2}{4} - 1} \right) \cong 2,21R, \quad (16)$$

melynek értéke pingponglabda esetén 43,12 mm, Lénárt-gömb esetén 225,26 mm. A héj ezt az állapotot azért sem érheti el, mert végtelenül nagy koncentrált erő esetén jöhet létre. Az 5., 6., 7. és 8. ábrákon a Pogorelov-féle kör-szimmetrikus modell szerint lehetséges legnagyobb benyomódásokat is jelöltük.



7. ábra
Lénárt-gömb teher-elmozdulás diagramja



8. ábra
Lénárt-gömb lekerekítettség-elmozdulás diagramja

6. KÖVETKEZTETÉSEK

A cikkben bemutatott analitikus modell a koncentrált teherrel terhelt gömbhéjak viselkedésének leírására alkalmas. A modellben lehetőség nyílik a körszimmetrikus és a diszkrét forgásszimmetrikus horpadási alakok együttes, azaz egy modellen belüli figyelembevételére úgy, hogy ezek között a horpadási alakok között folytonos átmenet is létrejöhet. Az eddig megjelent publikációkban ilyenrel nem lehet találkozni, a körszimmetrikus és a diszkrét forgásszimmetrikus horpadási alakok közötti átmenet ugrásszerűen, hirtelen következik be. Ennek többek között a kísérleti eredmények is ellentmondanak, hiszen sokszor azt láthatjuk, hogy a terhelés során a körszimmetrikus horpadási alakból lassan, jól megfigyelhető „fejlődéssel”, fokozatosan alakul ki a diszkrét forgásszimmetrikus (sokszög alaprajzú) horpadási alak. Bemutattuk, hogy a modell segítségével a körszimmetrikus és a diszkrét forgásszimmetrikus horpadási alakok közötti folytonos átmenet eredményesen vizsgálható.

A modell használatával kapott teher-elmozdulás összefüggések a körszimmetrikus és az egyes sokszögekhez tartozó, diszkrét forgásszimmetrikus horpadási alakok esetén eltérnek. Ennek az eltérésnek a szükségszerűségét támasztja alá az a levezetés, melynek eredményéül adódott, hogy a körszimmetrikus és a diszkrét forgásszimmetrikus alak nem vihető át egymásba nyúlásmentes alakváltozások segítségével. Ezért van szükség a polygonális horpadási alak figyelembevételére a gömbhéjak horpadásának vizsgálata során. Bemutattuk, hogy a modell segítségével a körszimmetrikus és a diszkrét forgásszimmetrikus horpadási alakokhoz tartozóan pontosabb teher-elmozdulás összefüggés adható meg, mint amelyek a korábbi publikációk tanúsága szerint eddig analitikus úton nyerhetők voltak.

A modell használatával eredményül adódott, hogy kisebb sugár-vastagság arányú héjak esetén (ilyen például a pingponglabda) alacsonyabb oldalszámú sokszögek jöhetnek létre (három- és négyszög), nagyobb sugár-vastagság arányú héjak esetén (ilyen például az általam vizsgált úgynevezett Lénárt-gömb) pedig magasabb oldalszámú sokszögek (öt- és hatszög). Így arra a kérdésre, hogy milyen lehet egy adott gömbhéj horpadási alakja, és ehhez milyen teher-elmozdulás összefüggés tartozik, a bemutatott modell képes választ adni. A bemutatott modell szerint egy héj esetén többféle horpadási sokszög is létrejöhet. Ebben a cikkben nem szerepelnek az elméleti eredményeket alátámasztó kísérleti és vége-selemes vizsgálatok eredményei [34].

IRODALOMJEGYZÉK

- [1] Audoly, B., Pomeau, Y.: *Elasticity and geometry*, Oxford University Press, Oxford, 2010
- [2] Ben Amar, M., Pomeau, Y.: Crumpled paper, *Proceedings of the Royal Society London A*, **453**, 1997, pp. 729-755.
- [3] Blaise, A., André, S., Delobelle, P., Meshaka, Y., Cunat, C.: Identification of the true elastic modulus of high density polyethylene from tensile tests using an appropriate reduced model of the elastoviscoplastic behavior, arXiv:1206.4268v1, 2012
- [4] Bushnell, D.: Bifurcation phenomena in spherical shells under concentrated and ring loads, *AIAA Journal*, **5/11**, 1967, pp. 2034-2040.
- [5] Croll, J. G. A.: Towards simple estimates of shell buckling loads, *Der Stahlbau*, **9**, 1975, pp. 283-285.
- [6] Csonka P.: *Héjszerkezetek*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1981
- [7] Evkin, A. Yu.: Large deflections of deep orthotropic shells under radial concentrated load: asymptotic solution, *International Journal of Solids and Structures*, **42**, 2005, pp. 1173-1186.
- [8] Fitch, J. R.: The buckling and post-buckling behavior of spherical caps under concentrated load, *International Journal of Solids and Structures*, **4**, 1968, pp. 421-446.
- [9] Forgács G.: Fizika a biológiában, *Fizikai Szemle*, **3**, 1996, pp. 95-101.
- [10] Galpin, B., Grolleau, V., Umiastowski, S., Rio, G., Mahéo, L.: Design and application of an instrumented projectile for load measurements during impact, *International Journal of Crashworthiness*, **13/2**, 2008, pp. 139-148.
- [11] Grolleau, V., Galpin, B., Penin, A., Rio, G.: Modeling the effect of forming history in impact simulations: evaluation of the effect of thickness change and strain hardening based on experiments, *International Journal of Crashworthiness*, **13/4**, 2008, pp. 363-373.
- [12] Gupta, N. K., Mohamed Sheriff, N., Velmurugan, R.: Experimental and theoretical studies on buckling of thin spherical shells under axial loads, *International Journal of Mechanical Sciences*, **50**, 2008, pp. 422-432.
- [13] Hegedűs I., *Héjszerkezetek*, Műegyetemi Kiadó, Budapest, 1998
- [14] Ivanova, J., Pastrone, F.: *Geometric method for stability of non-linear elastic thin shells*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 2002
- [15] Knoche, S., Kierfeld, J.: The secondary buckling transition: wrinkling of buckled spherical shells, *European Physical Journal E*, **37/7**, 2014, pp. 1-21.
- [16] Kollár, L., Dulácska, E.: *Buckling of Shells for Engineers*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1984

- [17] Lobkovsky, A. E.: Structure of Crumpled Thin Elastic Membranes, PhD disszertáció, University of Chicago, Department of Physics, Chicago, 1996
- [18] Menyhárd I.: *Héjszerkezetek*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1966
- [19] Moulton, D. E., Goriely, A., Chirat, R.: Mechanical growth and morphogenesis of seashells, *Journal of Theoretical Biology*, **311**, 2012, pp. 69-79.
- [20] Niordson, F. I.: *Shell theory*, Elsevier, Amszterdam, 1985
- [21] Pauchard, L., Rica, S.: Contact and compression of elastic spherical shells: the physics of a 'ping-pong' ball, *Philosophical Magazine B*, **78/2**, 1998, pp. 225-233.
- [22] Penning, F. A.: Nonaxisymmetric behavior of shallow shells loaded at the apex, *Journal of Applied Mechanics*, **33**, 1966, pp. 699-700.
- [23] Pogorelov, A. V.: *Die Verbiegung konvexer Flächen*, Akademie-Verlag, Berlin, 1957
- [24] Pogorelov, A. V.: Stability of axially symmetric deformations of spherical shells under axially symmetric load, NASA Contract TT F-8628, ST-SM-10050, Arlington, 1963
- [25] Pogorelov, A. V.: *Bendings of Surfaces and Stability of Shells*, American Mathematical Society, Providence, 1988
- [26] Quilliet, C., Zoldesi, C., Riera, C., Blandaren, A. van, Imhof, A.: Anisotropic colloids through non-trivial buckling, *European Physical Journal E*, **27**, 2008, pp. 13-20.
- [27] Ramm, E., Wall, W. A.: Shell structures – a sensitive interrelation between physics and numerics, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **60**, 2004, pp. 381-427.
- [28] Ruan, H. H., Gao, Z. Y., Yu, T. X.: Crushing of thin-walled spheres and sphere arrays, *International Journal of Mechanical Sciences*, **48**, 2006, pp. 117-133.
- [29] Tarnai, T.: Buckling patterns of shells and spherical honeycomb structures, *Computers and Mathematics with Applications*, **17/4-6**, 1989, pp. 639-652.
- [30] Thang, C. Q.: A gömbhéj szimmetrikus horpadása, *Építés-Építészettudomány*, **21/1-2**, 1989, pp. 95-108.
- [31] Vaziri, A., Mahadevan, L.: Localized and extended deformations of elastic shells, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **105/23**, 2008, pp. 7913-7918.
- [32] Vaziri, A.: Mechanics of highly deformed elastic shells, *Thin-Walled Structures*, **47**, 2009, pp. 692-700.
- [33] Vető, D., Sajtó, I.: Application of geometric method to determine the buckling load of spherical shells, *Pollack Periodica*, **4/2**, 2009, pp. 123-134.
- [34] Vető D., Sajtó I.: Geometriai módszer alkalmazása gömbhéjak horpadásának vizsgálatához, *Építés-Építészettudomány*, **42/3-4**, 2014, pp. 239-257.
- [35] Zhu, E., Mandal, P., Calladine, C. R.: Buckling of thin cylindrical shells: an attempt to resolve a paradox, *International Journal of Mechanical Sciences*, **44**, 2002, pp. 1583-1601.