

# A vasúti járművek és a sín-pálya rendszer kölcsönhatásainak kinematikája

Dr. Mihalik András<sup>1</sup>, Csek Károly<sup>2</sup>, Nagy Sándor<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Nagyvárad Egyetem, <sup>2</sup>MÁV mérnök tanácsos Budapest  
<sup>3</sup>kohómérnök, Nagyvárad

## Abstract

*The paper on rolling material interactions with the sleeper-rail system points out the dynamic effects in the wheel-sleeper contact point with the appearance of acceleration, an important factor in dimensioning the resistance capacity.*

*„A matematikai formula a mérnöknek csak az,  
ami a nyelvten az írónak:  
vezeti a gondolatot, de nem ad gondolatot”*

Dupuit

A szerzőknek e közleménye a sín-pálya rendszer és a vasúti járművek kölcsönhatásaiból származó dinamikus erőhatásaival foglalkozik, leszűkítve a sín és a kerék érintkezési pontján megjelenő gyorsulásokra, valamint a sín-pálya rendszer belső ellenállásának, az idő függvényében való közelítő meghatározására.

A vasúti pályarendszer vezeti és alátámasztja a vasúti járműveket, tehát teherviselő szerkezet.

A teherviselő mérnöki szerkezeteket csak akkor tekinthetjük feladatuk elviselésére alkalmasnak, ha teherbírásuk és tényleges igénybevételük kisebb a teherbírásuknál. Tehát szükségünk van a vágány teherbírásának és tényleges igénybevételének az ismeretére.

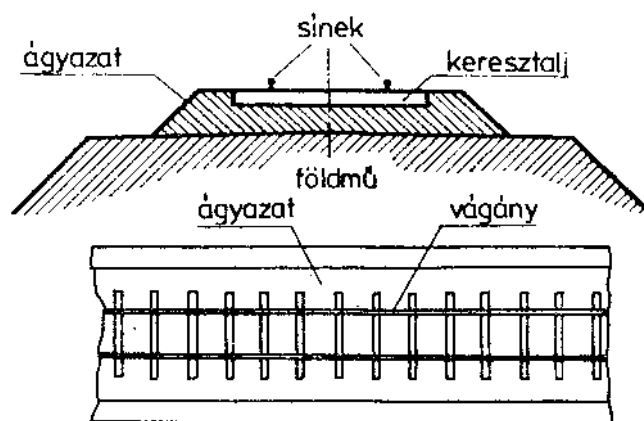
A vágány teherbírásának és igénybevételének megállapítása azonban nagy nehézségekkel jár, ennek következtében a számítások eredményének pontossága és megbízhatósága nem éri el a mérnöki számításokban általánosan megszokott értékeket. Tehát itt az igénybevételek számításakor nem várhatunk olyan pontosságot, mint más mérnöki szerkezetek, különösen az acélszerkezetek esetében.

Az ilyen számításokban részben a számítási eredményeket hasonlítjuk össze, a mérési eredmények közepértékével vagy más paraméterek hatásának számított értékeit egymással.

Bonyolultak és elméletileg nehezebben modellezhetők egyes erőhatások. Éppen erre való tekintettel szükséges, hogy a vasút sín-pálya rendszert teljes igénybevételének mennyiségi értékelésekor, a matematikai statisztikákat is alkalmazzák.

## 1. Bevezetés

A vasúti közlekedés jellemzője a sima sín-pályán, a vágányon végzett kényszermozgás, amelyet a vasúti járművek nyomkarimával ellátott kerekei biztosítanak.



1. ábra  
A sín-pálya rendszer

Ez a kényszermozgás, amely fölöslegessé teszi a járművek kormányzását, megengedi sok járműből álló vonatok képzését is, így nagy terheknek, egyetlen vontató járművel való továbbítását.

Az acélsíneken, a vasúton gördülő acélkerekek haladásakor igen kicsi gördülőellenállás lép fel, amely csak 1/10 része a vasút kialakulása korában, legkorszerűbbnek tekinthető makadám úton közlekedő közúti jármű ellenállásának, de ma is csak 1/6-a a beton úton haladó gépjárműveknek. Ez azt jelenti, hogy vasúton ugyanakkora vonóerővel ma is hatszor annyi terhet lehet vontatni mint közúton.

Ezek a jelentős előnyök eredményezték a vasút rendkívül gyors elterjedését, és biztosítják, hogy nagy tömegek biztonságos, rendszeres, gyors, olcsó és az időjárástól szinte független szállítására, a szárazföldön ma is a korszerű vasút a legalkalmasabb.

A vasúti közlekedés két gépeleme a jármű és a pálya.

A jármű és a pálya között szoros kapcsolat és kölcsönhatás van, amely kihat elsősorban a futómű geometriai méreteire valamint a jármű haladása közben jelentkező dinamikus erőhatásokra.

Mivel ezek a forgalmat együttesen látják el, azért a szükséges követelményeknek nemcsak külön-külön, hanem egymás közötti jó kapcsolattal együttesen is meg kell felelniük.

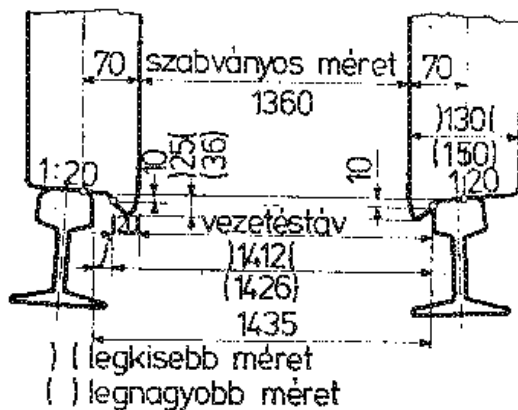
Kapcsolatuk mechanikai természetű, amelynek statikai, és dinamikai összetevői vannak.

A vasúti járműfutás mechanikájában tiszta statikus eset nem fordul elő. A járművek mozgásait statikus és dinamikus összetevők kölcsönös egymásra hatása vezérli, amelyek sztohasztikusan váltakozva kerülnek túlsúlyba.

A pálya állapota jelentősen befolyásolja a futás minőségét, a pályán közlekedő járműpark tömege, szerkezeti állapota és mennyisége viszont döntő mértékben játszik közre a pálya állapotának kialakulásában. A kerék és a sín érintkezési pontjaiban jelentős érintkezési feszültség (Hertz feszültség) jelenik meg, amelyet csak jó minőségű acélanganyagban lehet megengedni.

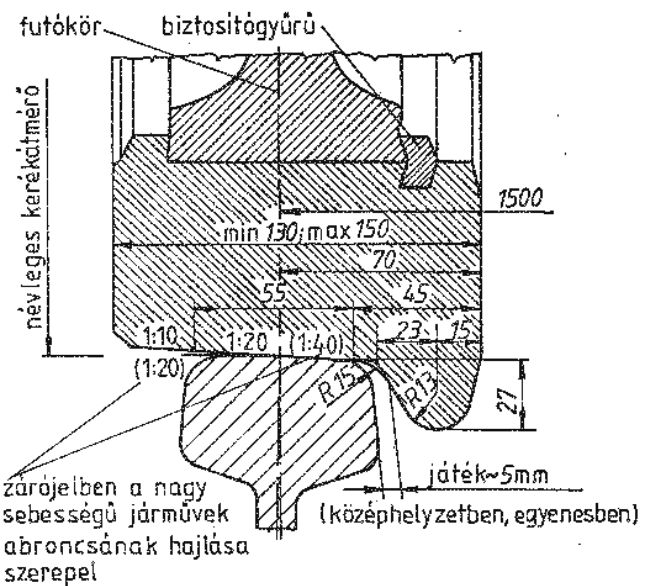
Ezt a gyakorlatilag koncentrikusan jelentkező terhelést egyre kisebb megosztó terheléssé alakítjuk át, egészen a teherhordó talajig.

A komplex statikus és dinamikus együttes vizsgálat azonban olyan bonyolult, hogy még számítógépek segítségével is megoldhatatlan.



2. ábra

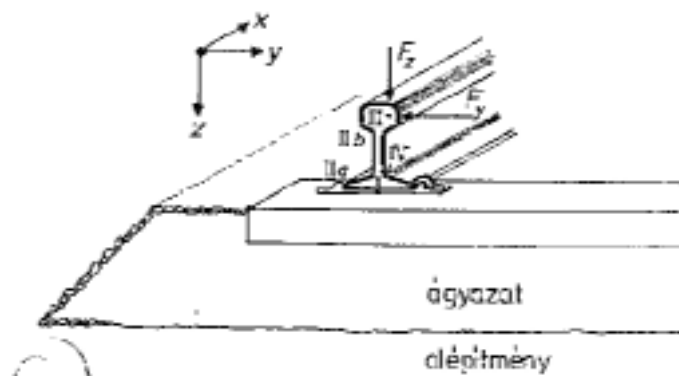
A vasúti kerék-pár és a vágány



3. ábra

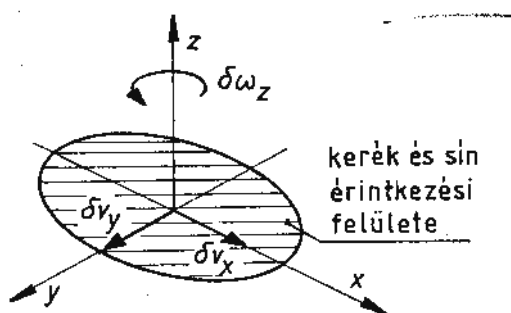
A kerék és a sín érintkezési pontja

A futástechnikai számításokban nagy jelentősége van a kerék-sín kapcsolat korszerű elméletének, amely figyelembe veszi a gördülés közben létrejövő deformációk hatását.



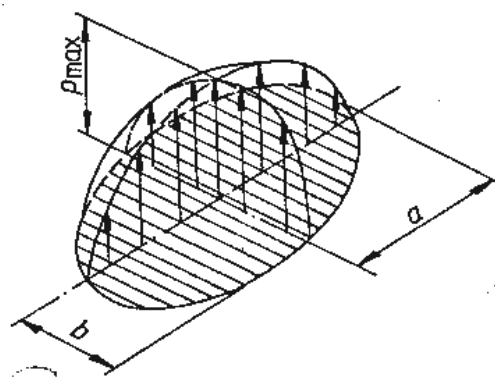
4. ábra  
A sínt érő erőhatások iránya

Mivel a sín és kerék közötti erőzárás nem tekinthető egyszerű súrlódási jelenségnek, az érintkezési felületen keletkező erők számításra szolgáló, formálisan a Coulomb-féle súrlódási törvény analógiájára épülő összefüggésekben szereplő tényezőket nem súrlódási, hanem erőkapcsolat tényezőnek nevezzük, melyeknek meghatározásához rugalmasságtani megfontolások szükségesek.



5. ábra  
A kerék és a sín érintkezési felülete

A kerék-sín érintkezés elméleti alapja kis környezetben lezajló, döntően rugalmas és részben képlékeny alakváltozások fontos szerepéből adódik. Ezek a kis deformációk folyamatosan összegződnek és például a vontatáskor számolható szögsebességnél nagyobb szögsebességet eredményeznek.



6. ábra  
Nyomás eloszlás az elliptikus érintkezési felületen

## 2. A probléma felvetése

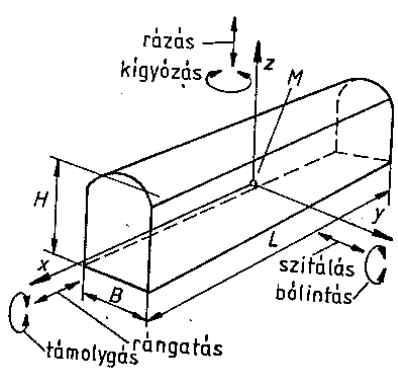
A vasúti terhelés megállapításánál – amely nem más mint a mozgó járművek teljes erőhatása – fontos problémaként jelentkeznek a mozgó kerék és a sín (gerenda) gyorsulásának a jellege, kölcsönhatása. Ugyancsak figyelmet érdemel a pálya-sín rendszerben a külső ellenállási erő megjelenése az idő függvényében.

A következőkben a gyorsulás problémájának elméletével.

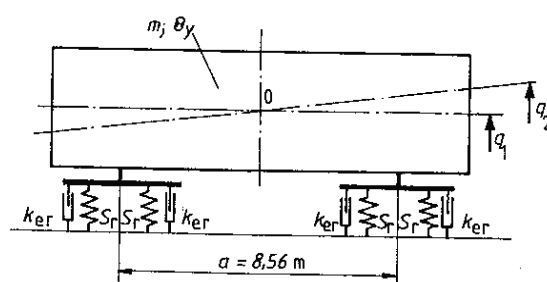
### a). A kerék és a sín kölcsönhatásainak a kinematikája

Egy konstans erőrendszer mozgásproblémájának a megoldása rugalmas hosszgerenda ágyazaton felveti azt a kérdést, hogy a gerenda gyorsulása a mozgó teher keresztmetszetében egyenlő-e vagy nem a terhelésnek a függőleges gyorsulásával.

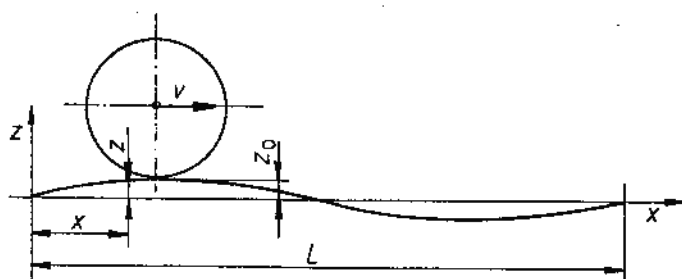
Ennek a kérdésnek a tanulmányozására a hordrugók lengőrendszerei kerültek a gyakorlati kutatás középpontjába. Egy személyvagon hordrugóinak az összenyomódását vizsgálták a sebesség függvényében.



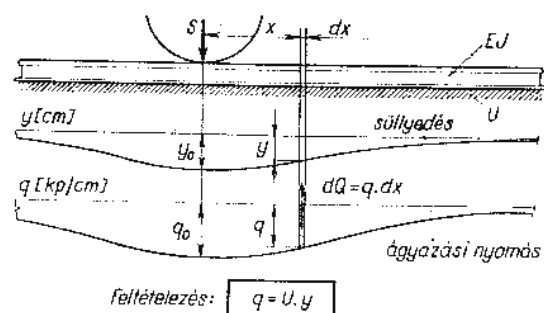
7. ábra  
A vasúti jármű lengései



8. ábra  
A jármű egyszerűsített lengő rendszere

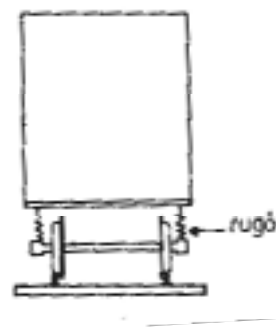


9. ábra  
A pályahibák okozta gyorsulások



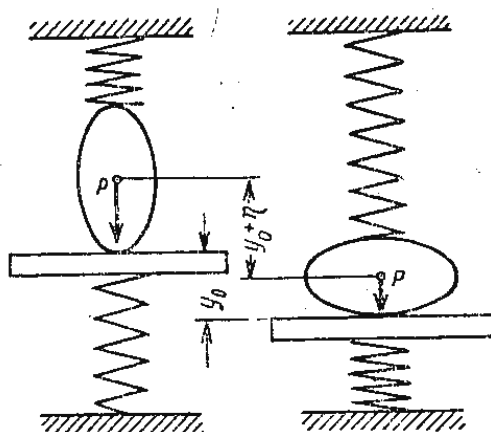
10. ábra  
A rugalmas ágyazaton fekvő, a keresztaljas vágányt helyettesítő hosszgerenda rugalmas vonala

A sín  $y_0$  süllyedése a terhelés alatt (az eredeti állapothoz viszonyítva) maga után vonja a kerékközpont forgásának az elmozdulását ( $y_0 + \eta$ ) értékkel, melynek a közepes összenyomódása a mozgás minőségi paramétere, a kerék és a pálya kifogástalan állapotát illetően. A kísérletek azt bizonyítják, hogy a hordrugók közepes helyzete nem függ a mozgás sebességétől.



11. ábra  
A vasúti kocsiszekrény elhelyezése a kerék-páron

Az elméleti megoldást, amely a sebesség és a gyorsulás kölcsönhatásait a sín és a kerék esetében meg-  
erősítik, az alábbiakban próbáljuk bizonyítani.



12. ábra  
Sín  $y_0$  süllyedése

Feltételezzük, hogy a hosszgerendás rugalmas ágyazaton a kerék mozgásban van. Ezt a mozgást ebben az esetben összetettnek nevezhetjük, amely a gerenda elemének relatív mozgásából (a kerék és a sín érintkezési pontjában) valamint a kerék mozgásából adódik.

Az egyszerűség kedvéért a kerék mozgását egy párhuzamos síkban képzeljük el.  
A kerék sebességét egy vektor egyenlőségéből határozzuk meg.

$$\vec{V}_k = \vec{V}_q^0 + \vec{V}$$

ahol

$\vec{V}_k$  – a kerék abszolút sebessége

$\vec{V}_q^0$  – a gerenda sebessége a kerék érintkezési pontjában

$\vec{V}$  – a kerék sebessége a gerenda eleméhez viszonyítva amely a kerék és a sín érintkezési környezetében található

A kerék abszolút sebességének a komponensei az ábrán láthatók.

Ha a vektor egyenlőséget (1) az  $y$  tengelyre vetítjük, adódik:

$$\text{vet} \cdot y \cdot \vec{V}_k = \text{vet} \cdot y \cdot \vec{V}_q^0 + \text{vet} \cdot y \cdot \vec{V}$$

Szem előtt tartva, hogy

$$\text{vet} \cdot y = \left( \frac{\partial x}{\partial y} \right) \cdot \text{vet} \cdot x \cdot \vec{V}$$

$$x=x_0$$

amely az alábbi módon is írható:

$$\text{vety} \cdot \vec{V}_q^0 = \text{vety} \cdot \vec{V}_k - \text{vetx} \cdot \vec{V} \cdot \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x=x_0} \quad (2)$$

A gerenda lengése a kerék mozgásakor: a rugalmas süllyedés nagysága  $y$  függvénye a keresztmetszet  $x-x_0$  távolságnak és az időnek, azaz

$$y = y(x, t)$$

a differenciál  $dy$ , pedig

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial y}{\partial t} \cdot dt$$

Az idő számítását a mozgó rendszer koordinátáinak  $x, z$  áthaladása pillanatától számítjuk, amely egyenes sebességgel mozog, és amelynek az értéke egyenlő a kerék abszolút sebességének a vízszintes komponensével.

Az abszcisszák közötti kapcsolatot:

$$x = z - z_0$$

A mozgó rendszer koordinátaival az abszcisszát

$$z_0 = \text{vet} \cdot x \cdot \overline{V}_K \cdot t$$

behelyettesítve, kapjuk

$$x = z - \text{vet} \cdot x \cdot \overline{V}_K \cdot t$$

A lengés folyamatában a gerenda pontjait meghatározó  $z$  értéket konstansnak vesszük, mivel a gerenda nem tud (akadályozva van) hosszanti irányban elmozdulni.

Differenciálva a fent megkapott egyenletet és beszorozva  $dt$ -vel, adódik

$$dx = -\text{vet} \cdot x \cdot \overline{V}_K \cdot dt \quad (3)$$

Visszatérve a differenciálhoz, szem előtt tartva a (3) képletet, a következő adódik:

$$dy = \left( \frac{\partial y}{\partial x} - \text{vet} \cdot x \cdot \overline{V}_K \cdot \frac{\partial y}{\partial x} \right) \cdot dx + \frac{\partial y}{\partial t} \cdot dt$$

ahonnan

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial t} - \text{vet} \cdot x \cdot \overline{V}_K \cdot \frac{\partial y}{\partial x} \quad (4)$$

A gerenda pontjának a sebessége, amely közvetlenül a mozgó kerék alatt található, a következő behelyettesítésből határozható meg:

$$\left( \frac{dy}{dt} \right)_{x=x_0} = \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)_{x=x_0} - \text{vet} \cdot x \cdot \overline{V}_K \cdot \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x=x_0} \quad (5)$$

számon tartva,

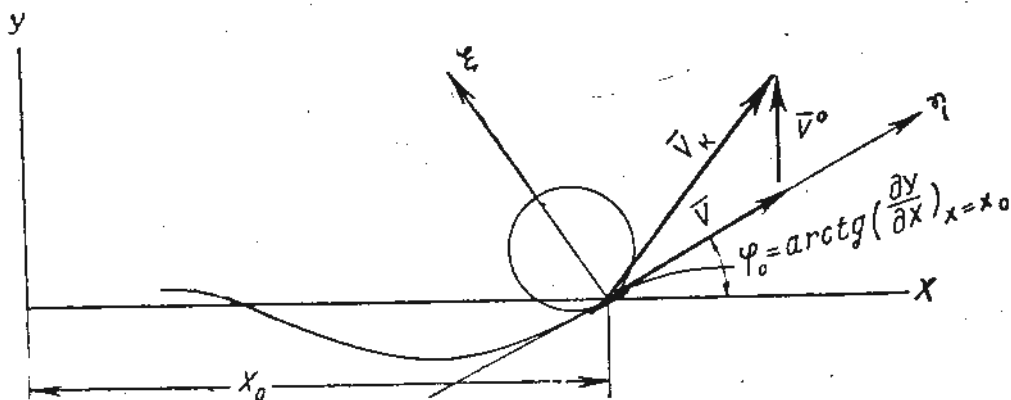
$$\left( \frac{dy}{dt} \right)_{x=x_0} = \text{vet} \cdot y \cdot \overline{V}_q^0$$

az egyenletek (2) és (5) megoldása eredményeként következik

$$\text{vet} \cdot y = \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)_{x=x_0} \quad (6)$$

Tehát a függőleges komponense a kerék abszolút sebességének, amely egyenletes vízszintes komponensű sebességgel mozog, a hosszanti mozgásában megakadályozott gerendán, egyenlő a gerenda süllyedésének parciális differenciáljával az időhöz viszonyítva (a kerék alatti keresztmetszetben).

Nézzük most a kerék és a gerenda (sín) gyorsulását.



13. ábra

A kerék abszolút sebességének komponensei

Megállapítottuk, hogy a kerék egy összetett mozgást végez, ezért a gyorsulást a következő kifejezésből kell meghatározni:

$$\overline{W}_K = \overline{V}_q^0 + \overline{W} + \overline{W}_{cor} \quad (7)$$

$\overline{W}_K$  – a kerék abszolút gyorsulása

$\overline{V}_q^0$  – a gerenda gyorsulása a kerék érintkezési pontjában

$\overline{W}$  – a kerék gyorsulása a gerenda eleméhez viszonyítva az érintkezési pont környezetében

$\overline{W}_{cor}$  – a coriolis gyorsulás

A koordináta-rendszer, amely a gerenda forgó eleméhez kötődik és amely a kerék és a gerenda érintkezési pontja, legyen  $\xi, \eta$ .

A kerék mozgásakor, a gerenda lehajlásának görbéjéhez viszonyítva, az  $X_0$  pont környezetében centripetális gyorsulás jelenik meg  $\overline{W}$ , a görbe központja felé orientálva, amelynek a vetülete a  $\xi$  tengelyre:

$$vet \cdot \xi \cdot \overline{W} = (vet_x \cdot \overline{V}_K \cdot \frac{1}{\cos \varphi_0})^2 \cdot K_0 \quad (8)$$

A (8)-ban  $\varphi_0$  egyenlő

$$\varphi_0 = \arctg \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x=x_0}$$

ahol  $\varphi_0$  – a gerenda lehajlási görbéjének a szöge az  $x=x_0$  pontban.

Szemelött tartva  $K_0$  értékét:

$$K_0 = \frac{\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_{x=x_0}}{\left[1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=x_0}^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_{x=x_0} \cdot \cos^3 \varphi$$

a (8) egyenlet ebben az esetben, a következő képpen alakul,

$$\text{vet}_{\xi} \bar{W} = (\text{vet} \cdot x \cdot \bar{V}_K)^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right) \cdot \cos \varphi_0 \quad (9)$$

$x=x_0$

A Coriolis gyorsulás meghatározható, a vektor egyenlőségéből

$$\bar{W}_{cor} = 2\bar{\omega}_0 x V$$

ahol  $\bar{\omega}_0$  -a szögsebesség vektora az  $\xi, \eta$  koordináta rendszerben.

A Coriolis gyorsulási vektor vetülete a  $\xi$  tengelyre, kiszámítható a következő képletből:

$$\text{vet} \cdot \xi \cdot \bar{W}_{\cos} = 2 \cdot \text{vet} x \cdot \bar{V}_K \frac{1}{\cos \varphi_0} \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_{x=x_0} \sin \alpha$$

ahol  $\alpha = 90^\circ$  - az  $\bar{\omega}_0$  és a  $\bar{V}$  közötti szög.

A sín keresztmetszeti forgásának a szögsebessége egyenlő az elhajlási görbe szögének a differenciáljával. Az  $x$  és  $t$  változók függvénye, amelyek meghatározhatók a következő kifejezésből:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt}$$

a nyilvánvaló egyenlőségéből következik:

$$\frac{\partial \text{tg} \varphi}{\partial t} = \frac{1}{\cos^2 \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \text{tg} \varphi}{\partial x} = \frac{1}{\cos^2 \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

Szem előtt tartva a (3) egyenletet, a szögsebesség kifejezésének a meghatározása a sín keresztmetszetének a forgásakor, a következőképpen alakul

$$\omega = \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x \cdot \partial t} - \text{vet} \cdot x \cdot \bar{V}_K \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) \cos^2 \varphi$$

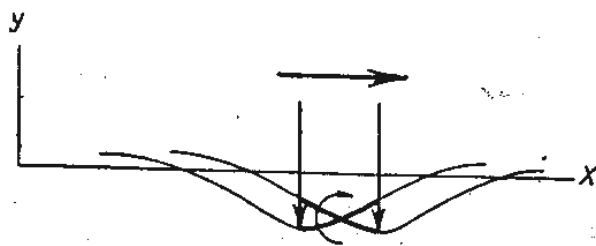
A forgás szögsebessége  $\xi, \eta$  koordináta rendszerben:

$$\omega_0 = \left[ \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x \cdot \partial t}\right)_{x=x_0} - \text{vet} x \bar{V}_K \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_{x=x_0} \right] \cos^2 \varphi \quad (10)$$

Abban az esetben, ha a kerék útvonala vízszintes egyenes, a (10) egyenlet így alakul:



$$\omega_0 = -\text{vet}x \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)_{x=x_0} \cdot \cos^2 \varphi$$



14. ábra

A gerenda forgása a csökkenő szögek irányában

A negatív előjel azt mutatja, hogy a gerenda (sín) elem forgása, amely a kerék és a sín érintkezési pontjának környezete, a csökkenő szögek irányába mutat (14 ábra). A (10) képlet eredményét behelyettesítve az  $\xi$  tengelyre eső Coriolis vektor gyorsulás kifejezésébe, következik

$$\text{vet}\xi \overline{W}_{\cos} = 2 \cos \varphi_0 \cdot \text{vet}x \cdot \overline{V}_K \cdot \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) - 2 \cos \varphi_0 \cdot \left( \text{vet}x \overline{V}_K \right)^2 \cdot \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)_{x=x_0} \quad (11)$$

A vektor egyenlőség (7) vetülete az  $y$  tengelyre, ismerve a (9) és (11) kifejezéseket, következik.

$$\begin{aligned} \text{vety} \cdot W_q^0 &= \frac{1}{\cos \varphi} + \text{vet}\xi \cdot \overline{W}_q^0 = \text{vety} \cdot \overline{W}_K - \\ &- 2 \text{vet}x \cdot \overline{V}_K \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)_{x=x_0} + \left( \text{vet}x \cdot \overline{V}_K \right)^2 \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)_{x=x_0} \end{aligned} \quad (12)$$

Térjünk vissza most már a gerenda lengő állapotához.

Differenciálva a (4)-t, az időre vonatkozóan, megkapjuk:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - 2 \text{vet}x \cdot \overline{V}_K \cdot \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x \cdot \partial t} \right) + \left( \text{vet}x \cdot \overline{V}_K \right)^2 \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

ha  $x=x_0$ , az egyenlet alakulása

$$\left( \frac{dy}{dt^2} \right)_{x=x_0} = \left( \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right)_{x=x_0} - 2 \text{vet}x \overline{V}_K \cdot \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x \cdot \partial t} \right)_{x=x_0} + \left( \text{vet}x \cdot \overline{V}_K \right)^2 \cdot \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)_{x=x_0} \quad (13)$$

a (12) és (13) egyenletek közös megoldása, a következő eredményt adja:

$$\text{vety} \cdot \overline{W}_K = \left( \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right)_{x=x_0} \quad (14)$$

## Következtetés

Tehát a végkövetkeztetés, amely bizonyítja feltevésünket: a kerék abszolút gyorsulásának függőleges komponense egyenlő a gerenda süllyedésének (nyílmagasságának) másodfokú parciális differenciáltjával, közvetlenül a kerék alatti keresztmetszetben, ami egy lényeges kérdés az átadódó erők szempontjából.

A kísérletek is azt bizonyították, mint ahogy ezt már említettük, hogy a kifogástalan kerék, és kifogástalan pálya esetében a sín gyorsulása – amely a kerék sebességétől függ – nem egyenlő a kerék függőleges gyorsulásával.

Ha a kerék forgását vesszük figyelembe, a nyert kifejezések a sebességből és a gyorsulásból következően, a kerék középpontjának a mozgását adják.

## Szakirodalom

- [5] Buza-Kiss, L: A vasúti jármű és a pálya kölcsönhatása, Járművek, mezőgazdasági gépek 1962. 1.sz.
- [6] Danilov, V.I.: Zseleznodorozsnij puty i ego vzaimogyejstvije sz podvizsnij szosztravom Moszkva 1961
- [7] Mihalik A., Csibi U., Ungur P. : Rezistența Materialelor Ed. Gloria 2002. Cluj Napoca.
- [8] Nemesdi E., Vasúti felépítmény II. Budapest 1966
- [9] Nagy K.: Elméleti mechanika. Budapest 1985
- [10] Schramm G.: Oberbautechnik und Oberbanwirtschaft Darmstadt 1960
- [11] Sahunianc G.M.: Zseleznodorozsnij puty. Moszkva 1969
- [12] Unyi B., Nemesdi E: A vasúti felépítmény néhány elméleti és szerkezeti kérdése, Budapest 1964.