Azonos névleges értékű, hitelesített súlyokból alkotott csoportok együttes mérési bizonytalansága

Zelenka Zoltán*

Több mérési feladatnál alkalmaznak súlyokat. Sokszor ezek nem egyenként, hanem különböző társításban kombinációkban kerülnek felhasználásra. Erre jó példa nagyobb mérlegek kalibrálása, hitelesítése. Tény, hogy a súlyok korreláltak (értékük nem teljesen független egymástól), de a korreláció mértékéről általában nincs információja az átlagos felhasználónak. Információ hiányában teljes korreláció feltételezését javasolják a súlyok között [1]. Ez természetesen növeli a becsült mérési bizonytalanságot. Ennek csökkentésére az alábbi feltevések valamelyikével szoktak élni:

- Egy helyen kalibrált nagy névleges tömegű súlyok között jelentős a korreláció, ezért az ajánlást követni kell.
- Különböző névleges értékű súlyok esetén a korreláció elhanyagolható.
- Kis névleges értékű tömegek esetén a korreláció elhanyagolható.

A fenti felvetések alkalmazása azonban bizonytalan. Mindenkiben felmerül, hogy mit jelent a nagy névleges tömeg, mikortól lehet kis névleges tömegről beszélni, valamint mihez képest lehet elhanyagolni a korreláció hatását.

A három felvetés közül jelen cikkben az elsőt vizsgáljuk meg és bizonyítjuk, hogy hitelesített súlyok esetén az ajánlásnál kisebb eredő mérési bizonytalanság is jogosan, műszakilag megalapozottan alkalmazható.

Példa a kérdés szemléltetésére

Egy kalibráló laboratórium kalibrálni kíván egy 500 kg-os nem automatikus mérleget. Ehhez 25 darab, egyenként 20 kg-os M_2 pontossági osztályú súlyt használ. Ezek mérési bizonytalansága egyenként, bizonyítványuk szerint 1 gramm. Ha feltételezhetnénk, hogy a súlyok hitelesítésekor az egyes súlyok mérése között nem volt kölcsönhatás (korreláció), másként kifejezve, nem álltak elő azonos körülmények, akkor a 25 súly együttes bizonytalansága 5 gramm lenne. Mivel nem ismert a korreláció mértéke, az ajánlást követve a súlyok együttes bizonytalanságát 25 grammnak, azaz ötször nagyobbnak kell becsülni.

Alapvető ismeretek, feltételezések a modell felállításához

1. A súlyokat pontossági osztályokba sorolják. Minden névleges értékhez és pontossági osztályhoz (E_1 … M_3) tartozik egy legnagyobb megengedett hiba érték (1. táblázat).
2. Gyakorlatban eltérő pontossági osztályú súlyokat együttesen nem használnak, ezért ezzel az esettel nem érdemes foglalkozni. Jellemzően a súlyokat 1 mg és 10 kg között készletekben alkalmazzák, melyek legfeljebb három azonos névleges értékű tagot tartalmaznak. (1 ábra.) A készleteket nem szokták keverni, ezért a gyakorlatban 10 kg-ig bezárólag nem jellemző háromnál több, azonos névleges értékű tag együttes alkalmazása.
3. 10 kg felett szokásos nagyobb mennyiségű, azonos névleges értékű súlyt együttesen használni. (2. ábra)

*Országos Mérésügyi Hivatal

Névleges érték	Legnagyobb megengedett hiba (δ)[mg]						
	E_1	E_2	F_1	F_2	M_1	M_2	M_3
50 kg	25	75	250	750	2500	7500	25000
20 kg	10	30	100	300	1000	3000	10000
10 kg	5	15	50	150	500	1500	5000
5 kg	2.5	7.5	25	75	250	750	2500
2 kg	1.0	3.0	10	30	100	300	1000
1 kg	0.5	1.5	5	15	50	150	500
100 mg	0.005	0.015	0.05	0.15	0.5	1.5	
50 mg	0.004	0.012	0.04	0.12	0.4		
1 mg	0.002	0.006	0.020	0.06	0.20		

1.táblázat. Legnagyobb megengedett hiba (hitelesítési hibahatár) értékei

1.ábra. Súlysorozat

4. A súlyok kiterjesztett mérési bizonytalansága az Országos Mérésügyi Hivatal által kibocsátott bizonyítványok szerint, k=2 érték mellett, a hitelesítési hibahatár harmada[1], ami összhangban áll az OIML ajánlással[2]. Tanulmányozva a hitelesítési eljárást,

---

[1] Jelen számítás szempontjából lényegtelen, hogy k=2, vagy k=1 mellett hajtjuk végre azokat, ezért nem számoljuk át az értéket standard bizonytalanságra.

[2] Az egyharmados érték a megkövetelt érték a mérési bizonytalansággal szemben, amit vagy a hitelesítési eljárás helyes végrehajtása szavatol, a korábban elvégzett számításoknak megfelelően, vagy konkrétan kiszámolják, és ellenőrzik, hogy nem nagyobb-e az elvárt értéknél. A kapott információ minden esetben csak annyi, hogy a bizonytalanság kisebb vagy egyenlő a hibahatár harmadánál.

egyértelmű, hogy a hitelesítésekhez jellemzően egy pontossági osztállyal pontosabb etalon súlyt alkalmaznak, tehát az alkalmazott etalon súly hibahatára legfeljebb harmada annak a súlyénak, melyet hitelesítenek vele. Ennek következménye, hogy a hitelesítéshez használt etalon bizonytalansága közelítőleg harmada az általunk használt súlyokénak.

2.ábra. 20 kg-os súlyok

5. Súlyok hitelesítésénél a mérési bizonytalanság több összetevőből áll (az etalon súly bizonytalansága és értékvándorlása (driftje), a felhajtóerő hatása, a mérleg leolvashatósága/felbontása, a mérés ismétlőképessége, a mérleg érzékenysége). A felsoroltak közül két, vagy több azonos névértékű, azonos időben hitelesített súly között korrelációt a hitelesítésük során használt (ugyanazon) etalon súly okozza. A többi tag csak olyan kis mértékben okoz korrelációt a súlyok között, hogy azt elhanyagoljuk[3].

A mérési bizonytalanságok áttekintése után ismerkedjünk meg a korreláció jellegével [2]. Ezt az alábbi két esetre számoljuk ki:

- két azonos névleges értékű és pontossági osztályú súly
- több azonos névleges értékű és pontossági osztályú súly

Mindkét példában összevetjük, mi lenne, ha korrelálatlanok lennének a súlyok, ha teljesen korreláltak lennének, valamint az OMH által, az OIML ajánlást követő eljárással hitelesített súlyokra vonatkozó modellt.

[3] A mérleg érzékenységéből adódó bizonytalanság helyes mérlegválasztással nagyon kicsi, ezért elhanyagolható, így az korreláltságot sem okozhat. A felhajtóerő szélsőséges esetben okozhat csak jelentős korrelációt (például nagyon alacsony és azonos légnyomás mellett hitelesített azonos névértékű súlyoknál, ha azok sűrűsége közeli egymáshoz. Ilyen eset ritka Magyarországon. Jellemzően ez a hatás a legnagyobb megengedett hiba öt százalékánál nem nagyobb, így elhanyagolható.

Két azonos névleges értékű és pontossági osztályú súly eredő bizonytalansága

A használni kívánt két súlyt (m_1, és m_2) azonos m_0 etalonnal hitelesítették különbségméréssel:

$m_1=m_0+k_1$, illetve $m_2=m_0+k_2$,

ahol k_1 és k_2 a mért tömegkülönbségek.
Tegyük fel (fenti megfontolásaink alapján), hogy súlyaink mérési bizonytalansága az etalon bizonytalanságából, valamint a különbség-megállapítás bizonytalanságából adódik[4]. A bizonytalanságok négyzetére, azaz a varianciákra felírva:

$u^2(m_1)= u^2(m_0)+u^2(k_1)$, illetve $u^2(m_2)= u^2(m_0)+u^2(k_2)$

A korreláció a két súly között $u(m_1, m_2)$ az azonos etalon okozta tag:

$$u(m_1,m_2)= u^2(m_0)$$

A két súly együttesének a mérési bizonytalansága a fenti korrelációval számolva:

$$u^2(m_1+m_2)= u^2(m_1)+ u^2(m_2)+2u(m_1,m_2)$$

A képletből a $2u(m_1,m_2)$ rész veszi figyelembe a korrelációt. Ennek elhagyása (tehát ha az értékét nullának tekintjük) azt jelentené, hogy a súlyok korrelálatlanok. Mivel ez a tag a hitelesítésnél felhasznált etalonsúly varianciájával azonos, nyilvánvaló soha nem lehet nulla.
Az azonos módon mért két súly bizonytalanságának becsült értéke azonos, tehát $u(m_1)=u(m_2)$, amit továbbiakban $u(m)$-el jelölünk. Jelen hazai hitelesítési gyakorlat mellett $u(m_0)=u(m)/3$, azaz az etalon súly bizonytalansága harmada a hitelesített súlynak. Ebből következik, hogy

$$u(m_1,m_2)= u^2(m)/9$$

Behelyettesítve:

$$u^2(m_1+m_2) = u^2(m_1) + u^2(m_2) + 2u(m_1,m_2) = 2u^2(m) + 2u^2(m)/9 = \frac{20}{9}u^2(m)$$

Azaz, két olyan azonos névértékű súlynak az eredő mérési bizonytalansága, melyeket azonos etalonról, időben nem nagy különbséggel hitelesítettek:

$$u(m_1 + m_2) = \sqrt{\frac{20}{9}}u(m) \approx 1{,}49u(m)$$

Amennyiben korreláltságot nem vennénk figyelembe, úgy a mérési bizonytalanság:

$$u(m_1 + m_2) = \sqrt{2}u(m) \approx 1{,}41u(m)$$

Látható, hogy a két érték „csak” mintegy 5% eltérést ad.
Ellentétben, ha feltételezzük, hogy teljes a korreláció, akkor a mérési bizonytalanság az egyes súlyok bizonytalanságainak összege lenne:

$$u(m_1 + m_2) = 2u(m)$$

Ebben az esetben az eltérés közel 34%.
Kiszámítva és kerekítve, 2 db 20 kg-os M_2 súly esetén a modell 1,5 gramm, a korrelálatlan eset 1,4 gramm, míg a korrelált eset 2 gramm bizonytalanságot eredményez.
A fenti három képlet összevetése azt adja, hogy a korreláció nem helyes figyelembevétele különböző hatással van a mérési bizonytalanság számítására. Ha nem vesszük figyelembe,

[4] A modell szempontjából feltétlen helyes ez a megközelítés. Részletesebb bizonytalanság analízisek számolnak az etalonhoz kötődő egyéb bizonytalanság összetevőkkel, például az etalon helyes értékének a kalibráláskori értékétől való eltérésével. Ezek az összetevőket az összehasonlítás bizonytalanságánál célszerű szerepeltetni, mert nem okoznak korrelációt.

akkor 5%-nál jobban alábecsüljük, ami elvileg nem engedhető meg. Ha pedig teljes korrelációt tételezünk fel, akkor viszont jelentős túlbecsülés adódik, ami nem minden esetben előnyös[5], de legalább nem okozhat rossz mérési eredmény[6] megadást.
Vizsgáljunk meg egy olyan esetet, amikor tényleg jelentős a korreláció. Belátható, hogy a korreláció akkor a legnagyobb, ha $u(m_0)=u(m)$, ami azt jelenti, hogy az etalon súly bizonytalansága azonos az ahhoz mért súly bizonytalanságával. Ez az eset természetesen elvileg nem állhat elő – különösen nem hitelesítési eljárás során – , de a gyakorlatban egyes különleges esetekben nagyon meg lehet közelíteni. Például 1 kg-os súlyok nagypontosságú összehasonlításánál előfordul, hogy a mérési bizonytalanság néhány százalékkal növekszik[7]. Ekkor feltételezhető, hogy $u^2(m)\approx u^2(m_0)=u(m_1,m_2)$. Behelyettesítve:

$$u^2(m_1+m_2)=u^2(m_1)+u^2(m_2)+2u(m_1,m_2)=4u^2(m)$$

Tehát ekkor igaz, hogy $u(m_1+m_2)=2u(m)$.
A súlyokra vonatkozó OIML ajánlás súlyok kombinációjánál teljes korreláció feltételezését javasolja. Mivel a legnagyobb megengedett hiba 50 g feletti súlyok esetén arányos a súly névleges értékével, teljes korreláció esetén bármely két (50 g feletti) súly együttes bizonytalansága az ajánlás szerint megegyezik a tömegükkel azonos egy darab súly bizonytalanságával (u(1kg+1kg)=u(2kg).
Hitelesített súlyokra vonatkozó modellünk esetén két azonos névleges értékű súly alkalmazásnak bizonytalansága jelentősen kisebb lesz, mint az egy darab a két súly tömegével azonos névértékű súly esetén.

Több azonos névleges értékű és pontossági osztályú súly társításának (kombinációjának) bizonytalansága

Miután megismertük a két azonos súly együttes használatánál fennálló viszonyokat, terjesszük ki a vizsgálatot több (n darab) azonos súly használatára. Ennek jellemző esete, amikor nagyobb mérlegeket kalibrálnak 20 kg-os súlyok használatával. Szokásosan ezeket a súlyokat egyszerre, azonos napon, azonos etalonnal, azonos mérleggel hitelesítik, így várhatóan erős a korreláltság. Az eredő variancia általánosan [3] felírva[8] n tetszőleges súlyra:

$$u^2\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right)=\sum_{i=1}^{n} u^2(m_i)+2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} u(m_i,m_j)\,,$$

ahol a jobboldalon az első összegző a korreláció nélküli tag, míg a második a korrelációkat veszi figyelembe.
Ha a súlyok azonosak, akkor az egyenlet átalakítható figyelembe véve, hogy

- $u(m_i,m_j)=\left[\dfrac{u(m)}{3}\right]^2$ azaz a hitelesítésnél az etalon bizonytalansága harmada hitelesített súlyénak,

[5] Nem előnyös abban az értelemben, hogy indokolatlanul növeli a mérési bizonytalanságot, amit így csak más módon, például pontosabb súlyok beszerzésével, vagy bonyolultabb méréssel lehetne ellensúlyozni, ha szükséges.
[6] Rossznak tekinthető az a mérési eredmény megadás, melynél a megadott mérési bizonytalanság a ténylegesnél kisebb.
[7] Természetesen ebben az esetben nem a hitelesítésnél deklarált hibahatár harmada a bizonytalanság, hanem a ténylegesen számított érték. A mérésnél minden befolyásoló mennyiség hatását figyelembe kell venni, hogy a mérési bizonytalanság egyéb összetevői kicsinyek legyenek az etalon súly bizonytalanságához képest.
[8] Az egyenlet a GUM 5.2.2 fejezetének 13 egyenlete, figyelembe véve, hogy az érzékenységi együtthatók értéke 1.

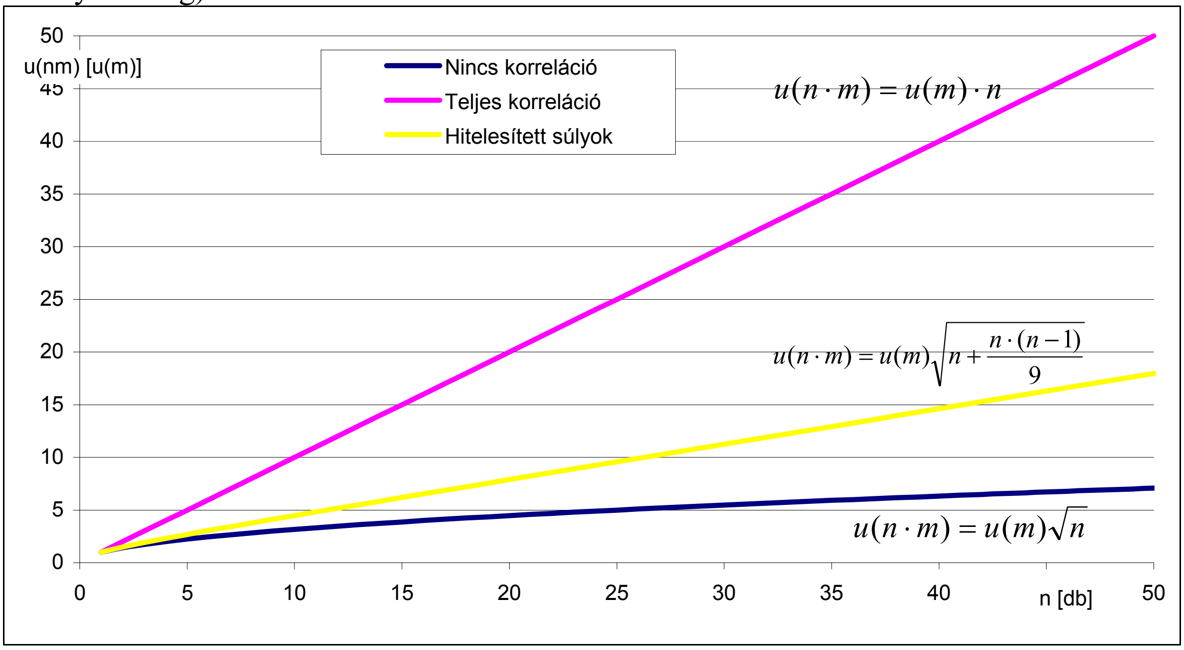
- $u(m_i) = u(m)$, tehát azonos súlyok esetén azok bizonytalansága is azonos
- valamint $\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} 1 = \frac{n\cdot(n-1)}{2}$, ezzel:

$$u^2(n\cdot m) = n\cdot u^2(m) + 2\cdot\frac{n\cdot(n-1)}{2}\left[\frac{u(m)}{3}\right]^2 = u^2(m)\left[n + \frac{n\cdot(n-1)}{9}\right]$$

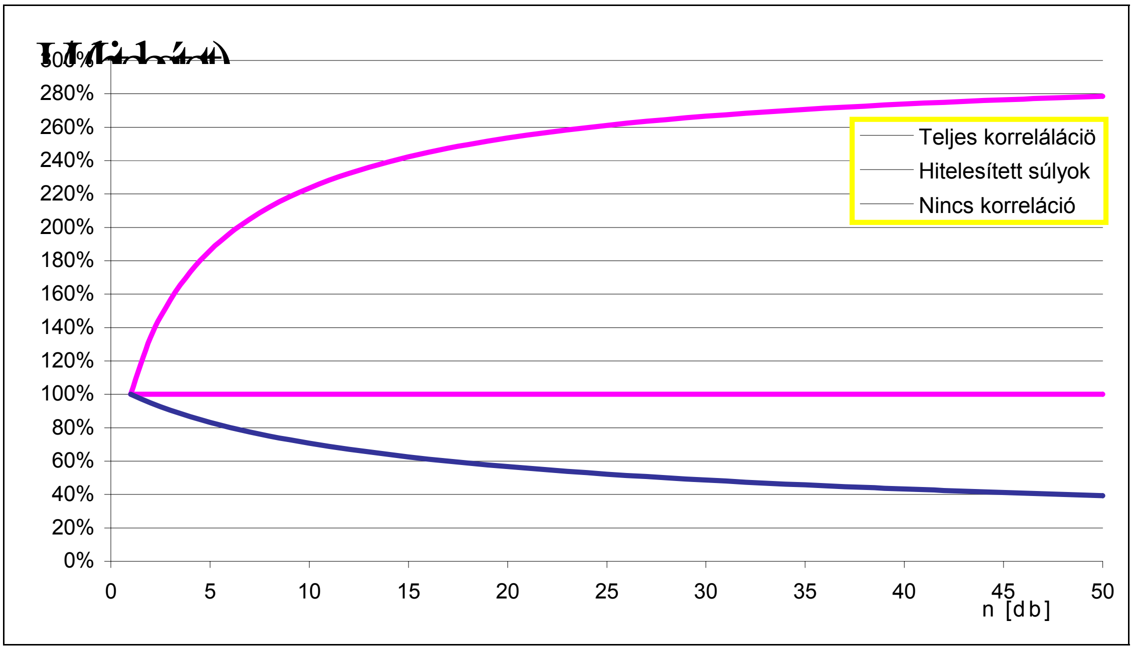
Azaz az eredő bizonytalanság (hitelesített súly):

$$u(n\cdot m) = u(m)\sqrt{n + \frac{n\cdot(n-1)}{9}}$$

Az 1 grafikon mutatja, hogy az egységnyi mérési bizonytalanságú súlyok eredő bizonytalansága hogyan alakulna a három esetben (nincs korreláció $u(n\cdot m) = u(m)\sqrt{n}$, teljes a korreláció $u(n\cdot m) = u(m)\cdot n$, és a hitelesített súlyok esetén számolt maximális eredő bizonytalanság).



1. grafikon: Mérési bizonytalanság változása a felhasznált súlyok számának függvényében



2. grafikon. A teljesen korrelált és a korrelálatlannak tekintet súlyok mérési bizonytalanságai a hitelesített súlyokra jelen modellel becsült mérési bizonytalanságának százalékában

A fenti három modell viszonya szemléletesebb, ha korreláció számításával nyert modellhez viszonyítjuk a másik kettőt (2 grafikon). Látható, hogy 1000 kg súly esetén a hiteles súlyok bizonytalansága csaknem harmada, mint a teljes korreláció feltételezése esetén. Ez gyakorlatilag azt jelenti, mintha egy pontossági osztállyal pontosabb súlyokat alkalmaznának. Ugyanakkor a korreláltságtól való eltekintés megengedhetetlen alulbecslést okoz, mert a súlyokat függetlennek tekintve a vélt eredő mérési bizonytalanság még a felét sem éri el a valódi értéknek.

---

[1] OIML R 111:1994 International Recommendation: Weights of classes E_1, E_2, F_1, F_2, M_1, M_2, M_3
[2]Gáti Ernő: A kovarianciák néhány metrológia alkalmazása (Műszerügyi és Méréstechnikai Közlemények; 61 szám. 1998.), valamint
Gáti Ernő: Handling correlated quantities in metrology , OIML bulletin Volume XL, 1999
[3]„Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement”; BIPM, IEC, IFCC, ISO, IUPAC, IUPAP, OIML; 1995