

HABIS HELGA

## Sztochasztikus csődjátékok – avagy hogyan osszunk szét egy bizonytalan méretű tortát?

A kooperatív játékelmélet egyik legjelentősebb eredménye, hogy számos konfliktushelyzetben stabil megoldást nyújt. Ez azonban csak statikus és determinisztikus környezetben alkalmazható jól. Most megmutatjuk a mag egy olyan kiterjesztését – a gyenge szekvenciális magot –, amely képes valós, dinamikus, bizonytalan környezetben is eligazítást nyújtani. A megoldást a csődjátékok példájára alkalmazzuk, és segítségével megvizsgáljuk, hogy a pénzügyi irodalom ismert elosztási szabályai közül melyek vezetnek stabil, fenntartható eredményre.\*

Journal of Economics Literature (JEL) kód: C71, C73.

Hogyan osszunk fel egy tortát? Ez a kooperatív vagy koalíciós játékelmélet egyik legfontosabb kérdése. A válasz pedig számos közgazdasági és társadalmi probléma megoldásához fontos lehet. Ilyen a legtöbb nemzetközi együttműködés (például a NATO), a természeti erőforrások elosztása (víz), a szavazás, az iskolai felvételi eljárások stb. Ezek a problémák matematikai modellezése a játékelmélet absztraktabb, koalíciós elméletével írható le. A játék csak azt írhatja le, hogy a játékosok és azok különböző csoportjai, a koalíciók mit érhetnek el, ha együttműködnek. A megoldás pedig ezen együttműködés hasznainak valamilyen elosztása.

A kooperatív játékelmélet legismertebb és legelterjedtebb megoldásfogalma a mag, ami olyan elosztások halmaza, amelyekről semmilyen koalíciónak nem érdemes eltérnie, mert ezáltal nem érhetnének el magasabb hasznosságot, illetve kifizetést. Ezért a mag a megállapodások stabilitásának záloga. Alkalmazhatóságát azonban számos rendkívül erős feltevés korlátozza: a klasszikus, statikus kooperatív elmélet kötelező érvényű megállapodásokat feltételez. Egy változó és bizonytalan környezetben ez a feltevés meglehetősen valóságidegen.

Ebben a tanulmányban bemutatjuk a mag egy olyan kiterjesztési lehetőségét, amely feloldja ezt az erős feltevést, ezáltal sokkal szélesebb problémakörben válik alkal-

---

\* A kutatást az OTKA pályázata (PD 101106), a Budapesti Corvinus Egyetem Kutatási Kiválósági Díja és a Magyar Tudományos Akadémia Lendület programja (LD-004/2010) támogatta.

mazhatóvá. A megoldás az úgynevezett gyenge szekvenciális mag (*Weak Sequential Core*). Ennek lényege, hogy kötelező érvényű megállapodások híján csak olyan koalíciók alakulását engedi meg, amelyek tagjainak érdekében áll a koalíció jövőbeli fenntartása, abból nem fognak a jövőben sem kilépni.

A gyenge szekvenciális mag segítségével olyan csődhelyzeteket elemzünk, ahol a felosztandó vagyron értéke és a követelések összege is bizonytalan lehet. Megvizsgáljuk, hogy a különböző felosztási szabályok: a Talmud-szabály, az arányos elosztás, a módosított arányos elosztás, a korlátos egyenlő díjazás, a korlátos egyenlő veszteség és a véletlen érkezés szabálya stabil eredményre vezetnek-e egy ilyen környezetben.

A tanulmány szerkezete a következő. Az alapvető játékelméleti fogalmak és jelölések bevezetés után bemutatjuk a gyenge szekvenciális magot. Ezután a csődproblémát elemezzük, definiáljuk az alapjátékot, ismertetjük az elosztási szabályokat, majd a sztochasztikus környezetre áttérve, megvizsgáljuk a szabályok stabilitását a gyenge szekvenciális mag segítségével.

## Fogalmak és jelölések

Tekintsünk egy két időszakos,  $t \in T = \{0, 1\}$  játékot. Az 1. időszakban a véges sok lehetséges világhállapotból  $S$  (*state of nature*) pontosan egy  $s$  következik be.<sup>1</sup> A 0. időszak világhállapota  $s = 0$ , így az összes világhállapot halmaza  $S' = \{0\} \cup S$ . Az 1. időszakban a játékosok egy *átruházható hasznosságú kooperatív játékot*, röviden TU-játékot játszanak, ahol megengedjük, hogy maga a játék az adott világhállapot függvénye legyen.

Az  $s \in S$  időszakban játszott  $\Gamma_s$  TU-játék egy pár,  $(N, v_s)$ , ahol  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  a játékosok halmaza és  $v_s : 2^N \rightarrow \mathbb{R}$  egy karakterisztikus függvény, amely a játékosok minden lehetséges részhalmazához  $C \subseteq N$  hozzárendeli azok *értékét*,  $v_s(C)$ -t.<sup>2</sup> Az  $i$ -edik játékos preferenciáit egy hasznossági függvénnyel írjuk le;  $u^i : \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}$ , amely minden kifizetési profilhoz  $x^i = (x_1^i, \dots, x_s^i) \in \mathbb{R}^S$  egy hasznosságértéket,  $u^i(x^i)$ -t rendel. A hasznossági függvényről feltesszük, hogy folytonos és állapotseparábilis, azaz felírható  $u^i(x^i) = \sum_{s \in S} u_s^i(x_s^i)$  alakban, ahol  $u_s^i(x_s^i)$  monoton növekvő. Vegyük észre, hogy a jól ismert Neumann–Morgenstern-féle hasznossági függvény például eleget tesz ezen feltevéseknek.

A fentiek alapján már definiálhatjuk az átruházható hasznosságú játékokat bizonytalansággal, amely játékosztályt eredetileg a *Habis–Herings* [2011b] cikk vezetett be.

1. DEFINÍCIÓ • Az *átruházható hasznosságú kooperatív játék bizonytalansággal* (TUU-játék, *transferable utility game with uncertainty*)  $\Gamma$  négy összetevővel adható meg,  $(N, S', v, u)$ , ahol  $v = (v_1, \dots, v_s)$  és  $u = (u^1, \dots, u^n)$ .

<sup>1</sup> Minket természetesen az az eset érdekel elsősorban, amikor  $|S| > 1$ .

<sup>2</sup> Itt feltesszük, hogy  $v_s(\emptyset) = 0$ .

Vegyük észre, hogy a 0. időszakban nincsenek kifizetések: a játékosok itt szembe-sülnek a bizonytalansággal és eldönthetik, hogy együttműködnek-e.

A TUU-játék központi kérdése, hogy miként osszuk el a nagykoalíció értékét,  $v(N)$ -et a koalíció tagjai között a különböző világállapotokban. Az *elosztás* (*allocation*) egy mátrixszal adható meg:  $x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^{S \times N}$ . Az  $s$  világállapotbeli elosztás  $x_s = (x_s^1, \dots, x_s^n) \in \mathbb{R}^N$ , egy koalíció részesedésének az elosztása pedig  $x^C = (x^i)_{i \in C} \in \mathbb{R}^{S \times C}$ . Egy adott  $C$  koalíció által elért kifizetés egy adott  $s$  világállapotban  $x_s(C) = \sum_{i \in C} x_s^i$ .

## A gyenge szekvenciális mag

A  $\Gamma$  játékban tehát egy bizonytalan méretű torta felosztásáról kell döntenünk. Természetesen olyan felosztást keresünk, ami *stabil*. Általánosságban egy  $\bar{x}$  elosztást akkor nevezünk stabilnak, ha nincs olyan világállapot  $s' \in S'$ , ahol a  $C \subseteq N$  koalíciónak megéri  $\bar{x}$ -t blokkolnia. A  $C$  koalíció akkor blokkolhat egy adott elosztást, ha tagjai magasabb kifizetést érhetnek el egy másik, megvalósítható elosztás esetében.

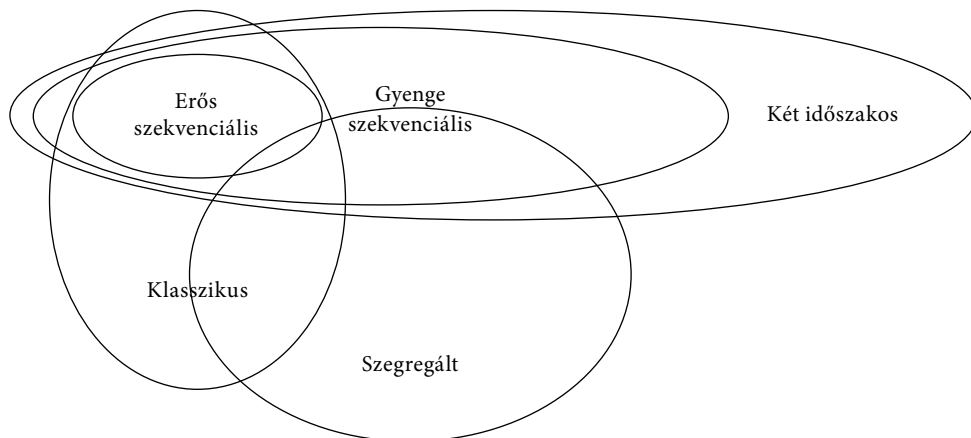
Az, hogy mit engedünk meg egy blokkoló koalíciónak, befolyásolja, hogy milyen elosztások lesznek stabilak, azaz a különböző feltevések különböző megoldásokhoz vezetnek:

- szegregált mag (Grossman [1977], Bester [1984], Repullo [1988]),
- két időszakos mag (Koutsougeras [1998]),
- erős szekvenciális mag (Predtetchinski–Herings–Peters [2002]) és
- gyenge szekvenciális mag (Kranich–Perea–Peters [2005], Habis–Herings [2010]).

Habis–Herings [2011a] egységes és jól összehasonlítható definícióját adja a felsorolt magmegoldásoknak, és összehasonlítja őket egy két időszakos, általános egyensúlyelméleti keretben. Az 1. ábra összefoglalja a tanulmány eredményeit.

### 1. ábra

Magmegoldások összehasonlítása



Az összehasonlítás eredménye, hogy a gyenge szekvenciális mag a legalkalmasabb megoldásfogalom az adott modellben, mivel az összes többi magnak van valamilyen hiányossága. A klasszikus mag (Gillies [1959]) eredendően egy statikus megoldás, így nem veszi figyelembe a dinamikából adódó későbbi blokkolási lehetőségeket. Az erős szekvenciális mag a klasszikus mag részalmazaként nem oldja fel ezt a problémát, továbbá tipikusan üres. A szegregált mag és a két időszakos mag viszont túlzottan is megengedő, mindkettő tartalmazza a versenyegyensúlyt, ami az adott keretek között (nem teljes piacok) még csak a korlátos hatékonyság kritériumát sem teljesíti. A szegregált mag ráadásul egyénileg irracionális megoldásokat is megenged. Mindezek miatt cikkünkben a gyenge szekvenciális maggal fogunk dolgozni.

A gyenge szekvenciális magot eredetileg Kranich–Perea–Peters [2005] definiálta egy több időszakos determinisztikus modellben. Később, ugyanebben a keretben Habis–Herings [2010] módosította a definíciót az eredmények fenntartása érdekében. A TUU-játékok esetére itt Habis–Herings [2011b] 1. lemmáját használjuk a játék megoldására.

Jelölje  $C(N, \nu)$  az  $(N, \nu)$  TU-játék klasszikus magját és  $WSC(\Gamma)$  a  $\Gamma$  TUU-játék gyenge szekvenciális magját.

2. DEFINÍCIÓ • A következő két állítás ekvivalens:

a)  $\bar{x} \in WSC(\Gamma)$ ,

b)  $\bar{x}$ -re igaz, hogy  $\bar{x}_s \in C(\Gamma_s)$  fennáll minden  $s \in S$ -re, és nincs olyan  $C \subset N$  és  $x^C$ , ahol  $x_s^C \in C(\Gamma_s, C)$  minden  $s \in S$ -re és  $u^i(x^i) > u^i(\bar{x}^i)$  minden  $i \in C$ -re.

Egy elosztás tehát akkor és csak akkor eleme a gyenge szekvenciális magnak, ha annak minden tagja eleme az aljátékok magjának minden világállapotban, továbbá nincs olyan koalíció, amely magasabb hasznosságot tudna elérni egy másik, olyan elosztással, amelynek tagjai szintén az aljátékok magjához tartoznak. Vegyük észre, hogy az utóbbi kitétel garantálja, hogy egy blokkoló koalíció által javasolt elosztástól,  $x^C$ -től, egyetlen alkoalíciónak  $C' \subsetneq C$ -nek sem érdemes semmikor eltérnie, hiszen egy magbeli elosztás nem blokkolható. Így a gyenge szekvenciális maghoz csak olyan elosztások tartoznak, amelyek kötelező érvényű megállapodás nélkül is fenntarthatóak (*self-enforcing*). A megoldás továbbá *ex post* hatékony is, hiszen garantálja az elérhető érték teljes szétosztását minden aljátékban.

Jelen modell kereteiben belátható a 1. TÉTEL.

1. TÉTEL • Ha a  $\Gamma$  játék minden  $\Gamma_s$  aljátéka konvex,<sup>3</sup> akkor  $WSC(\Gamma) \neq \emptyset$ .  
BIZONYÍTÁS: lásd Habis–Herings [2011b].

<sup>3</sup> Egy játékot konvexnek nevezünk, ha minden  $C \subset N$  és minden  $S \subsetneq T \subset N \setminus C$  koalícióra igaz, hogy  $\nu(S \cup C) - \nu(S) \leq \nu(T \cup C) - \nu(T)$ .

A konvexitás talán túl erős feltevésnek tűnhet, azonban belátható, hogy ennél enyhébb felvételek mellett (permutációs konvexitás vagy egzaktság) már találhatók olyan példák, amikor a gyenge szekvenciális mag üres.

Az eddig ismertetett elméleti keretet a következő fejezetben a csődjátékokra alkalmazzuk. Számos más jól ismert játék is beilleszthető lenne a modell kereteibe; például a reptérjátékok (*airport games*) (Littlechild–Owen [1973]), sorrendjátékok (*sequencing games*) (Curiel–Pederzoli–Tijds [1989]) standardfa-játékok (*standard tree*) (Granot és szerzőtársai [1996] stb.)

## Csődjátékok

Ebben a fejezetben bemutatjuk, hogy a gyenge szekvenciális mag hogyan alkalmazható a csődjátékok megoldására. A csődprobléma a Talmudból ered, játékelméleti jelentőségére először O'Neill [1982] hívta fel a figyelmet. A probléma egy talmudi példán alapul, ahol egy ember halála után a hátrahagyott vagyona  $E$  (*estate*) kevesebbet ér, mint az összes tartozása.

Egy *csődprobléma* tehát egy pár  $(E, d)$ , ahol  $d = (d^1, \dots, d^n)$  az egyedi tartozásokat tartalmazó vektor, amelyre igaz, hogy  $\sum_{i \in N} d^i \geq E \geq 0$ . A csődproblémát átalakíthatjuk egy kooperatív játékká:  $v^{E,d}(C) = \max \left\{ E - \sum_{i \in N \setminus C} d^i, 0 \right\}$  karakterisztikus függvényt alkalmazva (Aumann–Maschler [1985]). Egy koalíció értékét tehát úgy adhatjuk meg, hogy a teljes vagyon értékéből kivonjuk a többi játékos által követelt összeget, illetve ha ez a különbség negatív, akkor a koalíció értéke 0 lesz; azaz minden koalíció igényt tarthat a vagyon mások által nem követelt részére. Az így megadott csődjáték konvex.

## Elosztási szabályok

A csődprobléma megoldására számos szabály létezik. Először definiáljuk, hogy mit is értünk elosztási szabályon, majd röviden bemutatjuk a legfontosabbakat.<sup>4</sup>

3. DEFINÍCIÓ • Egy elosztási szabály egy olyan függvény, amely egy  $(E, d)$  csődproblémához hozzárendel egy  $x \in \mathbb{R}^N$  elosztást úgy, hogy  $\sum_{i \in N} x^i = E$  és  $d \geq x \geq 0$ .

A legismertebb elosztási szabály az *arányos szabály* P (*Proportional rule*), amely a követelések arányában osztja fel a vagyont. A *módosított arányos szabály* AP (*Adjusted Proportional rule*) először minden játékosnak kifizeti  $v^{E,d}(\{i\})$ -t, a kifizetéseket levonja az egyéni követelésekből és a vagyomból, majd a maradvagyont a módosított követelések arányában osztja szét. A *korlátos egyenlő díjazás szabály* CEA (*Constrained Equal Awards rule*) mindenkinek ugyanakkora össze-

<sup>4</sup> A szabályok átfogó és formális bemutatásáról lásd Thomson [2003].

get ad úgy, hogy senki sem kaphat többet, mint amennyit követel. Formálisan:  $i' \in N$ -re  $CEA^{i'}(E, d) = \min\{d^{i'}, \alpha\}$ , ahol  $\alpha \leq \max_{i \in N} d^i$ -t úgy választjuk meg, hogy  $\sum_{i \in N} \min\{d^i, \alpha\} = E$ . A korlátos egyenlő veszteség szabály CEL (*Constrained Equal Losses rule*) a veszteségeket teszi egyenlővé úgy, hogy senki se kapjon negatív összeget. A Talmudban szereplő javaslat, amelyet később *Aumann–Maschler* [1985] formalizált, a Talmud-szabály TR (*Talmud rule*), a CEA és a CEL kombinációja attól függően, hogy az összes követelés fele hogyan aránylik a teljes vagyonhoz. A Piniles-szabály a CEA kétféle alkalmazása attól függően, hogy az összes követelés fele hogyan aránylik a teljes vagyonhoz (*Piniles* [1861]). A Piniles-szabály és a korlátos egyenlőségi szabály ebben a modellben egybeesik a Talmud-szabállyal. A véletlen érkezés szabály RA (*Random Arrival rule*) veszi a játékosok érkezésének összes lehetséges sorrendjét, sorban kifizet mindenkit teljesen, amíg el nem fogy a vagyon, majd ezek átlagát kiszámolva határozza meg a végső elosztást. Az RA szabály tehát megegyezik a Shapley-értékkel.

### A talmudi példa

Az eredeti, talmudi vagyonfelosztási problémában egy férfinak három felesége van, akik a férjük halálakor a házassági szerződésük értelmében rendre 100, 200, illetve 300 összeget örökölnék. A Talmud három lehetőséget vizsgál, amelyekben a férfi vagyona halálakor 100, 200, illetve 300 lehet. Ezek alapján meghatározható a csődjáték karakterisztikus függvénye, melyet az 1. táblázat foglal össze.

#### 1. táblázat

A talmudi példa karakterisztikus függvénye

$v^{E,d}$	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1, 2\}$	$\{1, 3\}$	$\{2, 3\}$	$\{1, 2, 3\}$
$v^{100,d}$	0	0	0	0	0	0	0	100
$v^{200,d}$	0	0	0	0	0	0	100	200
$v^{300,d}$	0	0	0	0	0	100	200	300

Az előző alfejezetben ismertetett elosztási szabályok a 2. táblázatban szereplő elosztásokat eredményezik a talmudi példában.

Tehát a Talmud-szabály szerint például ha a felosztandó vagyon 300-at ér, akkor 50-et ad az első feleségnek, 100-at a másodiknak és 150-et a harmadiknak.

A fenti szabályokról könnyen belátható, hogy statikus környezetben magbeliek.

## 2. táblázat

Elosztási szabályok a talmudi példában

Játékos	Vagyon	Talmudi (TR)	Arányos (P)	Módosított arányos (AP)	Korlátos egyenlő díjazás (CEA)	Korlátos egyenlő veszteség (CEL)	Véletlen érkezés (RA)
$d^1 = 100$	100	33 1/3	16 2/3	33 1/3	33 1/3	0	33 1/3
	200	50	33 1/3	40	66 2/3	0	33 1/3
	300	50	50	50	100	0	50
$d^2 = 200$	100	33 1/3	33 1/3	33 1/3	33 1/3	0	33 1/3
	200	75	66 2/3	80	66 2/3	51	83 1/3
	300	100	100	100	100	100	100
$d^3 = 300$	100	33 1/3	50	33 1/3	33 1/3	100	33 1/3
	200	75	100	80	66 2/3	150	83 1/3
	300	150	150	150	100	200	150

## Sztochasztikus csődjátékok

Hogyan viselkednek a különböző elosztási szabályok, ha a vagyon és/vagy a követelések értéke bizonytalan? Kiterjeszhető a magkompatibilitás a sztochasztikus játéokra is? E kérdések megválaszolásához először ki kell terjesztenünk a statikus modellt.

A sztochasztikus csődprobléma – *Habis–Herings* [2012] definícióját követve – négy összetevővel adható meg  $(S', E, d, u)$ , ahol  $S$  a lehetséges világállapotok véges halmaza,  $E = (E_s)_{s \in S}$  a vagyon értéke a különböző állapotokban,  $d = (d_s)_{s \in S}$  az állapotfüggő követelésvektor és  $u = (u^i)_{i \in N}$  a játékosok hasznosságfüggvénye. A statikus esethez hasonlóan a sztochasztikus probléma is átalakítható egy kooperatív játékká.

4. DEFINÍCIÓ (SZTOCHASZTIKUS CSŐDJÁTÉK) • Legyen adott egy  $(S', E, d, u)$  sztochasztikus csődprobléma. Ekkor a  $\Gamma = (N, S', v, u)$  sztochasztikus csődjáték egy olyan TUU-játék, ahol  $v_s(C) = \max \left\{ E_s - \sum_{i \in N \setminus C} d_s^i, 0 \right\}$ , minden  $s \in S$  világállapotra és  $C \subseteq N$  koalícióra.

A fenti megállapítás – miszerint a csődjáték konvex – együtt az 1. TÉTELEL azt eredményezi, hogy a sztochasztikus csődjáték gyenge szekvenciális magja mindig nem üres. A stabilitás szokásos statikus tesztje, a magkompatibilitás tehát problémamentesen kiterjeszhető a sztochasztikus esetre is; a gyenge szekvenciális mag alkalmazásával.

Nézzük meg először egy egyszerű példán, hogy a gyenge szekvenciális mag milyen elosztásokat, illetve blokkolási lehetőségeket enged meg. Legyen  $N = 2$  és  $S = 2$  egyenlő bekövetkezési valószínűséggel:  $\rho_1 = \rho_2 = 1/2$ , és legyen a karakter-

risztikus függvény a következő:  $v_1(\{1, 2\}) = v_2(\{1, 2\}) = 1$ ,  $v_1(\{1\}) = v_2(\{2\}) = 1$  és  $v_1(\{2\}) = v_2(\{1\}) = 0$ . Azaz egy olyan csődjáték, ahol az első világhelyzetben az első feleség örököl mindent, a másodikban pedig a második feleség, és a két feleség nem ismeri férjük végrendeletének tartalmát.

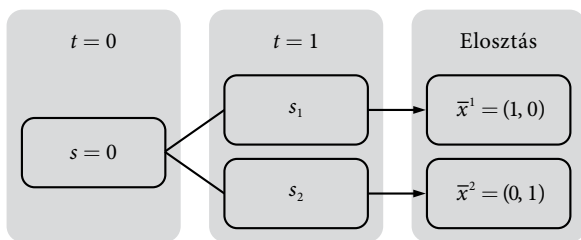
Legyen a következő (végrendelet szerinti) elosztás adott:

$$\bar{x} = (\bar{x}^1, \bar{x}^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A játékot a 2. ábra szemlélteti.

## 2. ábra

A csődjátékot szemléltető példa



Ekkor, ha a játékosok kockázatkerülők, magasabb hasznosságot érhetnek el, ha eltérnek az adott elosztástól; hiszen az adott  $\bar{x}$  elosztás a lehető legkockázatosabb megvalósítható felosztása a vagyonnak. A két feleség például dönthet úgy férjük halála előtt ( $s = 0$ ), hogy – a végrendelet tartalmától függetlenül – egyenlően felosztja a vagyont;

$$x = (x^1, x^2) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

A kockázatkerülő feleségek az  $x$  elosztás mellett mindketten magasabb hasznosságot érnek el, mint  $\bar{x}$  esetében tennék. Ez a megegyezés azonban nem hihető, hiszen az 1. időszakban blokkolható:

a)  $s = 1$  esetén az első feleségnek semmilyen érdeke nem fűződik ahhoz, hogy megossza a vagyont a másodikkal,  $x_1^1 = 1/2$ , tehát blokkolható  $\hat{x}_1^1 = v_1(\{1\}) = 1$  segítségével, és hasonlóan

b)  $s = 2$  estén a második feleségnek semmilyen érdeke nem fűződik ahhoz, hogy megossza a vagyont az elsővel,  $x_2^2 = 1/2$ , tehát blokkolható  $\hat{x}_2^2 = v_2(\{2\}) = 1$  segítségével.

Vegyük észre, hogy az  $x$  elosztás tagjai ( $x_1$  és  $x_2$ ) nem elemei a megfelelő aljáték klasszikus magjának:  $x_s \notin C(\Gamma_s)$  fennáll minden  $s \in S$  esetében. Az  $x$  elosztás tehát – a 2. definíció alapján – valóban nem lehet stabil megoldás. Mivel az aljátékok magja egyelemű, hiszen  $x_s^{i=s} = 1$  igaz kell, hogy legyen, ezért a játék egyetlen megoldása az  $\bar{x}$  elosztás.



Térjünk most vissza a talmudi példához! Amint azt már korábban megjegyeztük, minden szabály magbéli elosztáshoz vezet a statikus játékban. A sztochasztikus játék tekintetében ez azt jelenti, hogy minden szabály olyan elosztást eredményez, ami benne van az aljátékok klasszikus magjában. Tehát egyiket sem lehet az 1. időszakban blokkolni.

Kérdés, hogy mi a helyzet a 0. időszakban: van-e olyan koalíció, amely a bizonytalansággal szembeülve magasabb hasznosságú elosztást érhet el? Tekintsük például azt a háromszereplős sztochasztikus csödjátékot, ahol az 1. időszakban három lehetséges világállapot következhet be, mégpedig a talmudi példánkban szereplő három csödjáték, és ahol a három játékos hasznossági függvénye a következő alakú;  $u^i(x^i) = \sum_{s \in S} \frac{1}{3} [1000x_s^i - (x_s^i)^2]$ , ha  $0 \leq x_s^i \leq 300$ , minden  $s \in S$ -re.

Ekkor könnyen belátható, hogy a nagykoalíció a korlátos egyenlő díjazás (CEA) szabály kivételével mindegyik elosztást blokkolni tudja. A 3. táblázat bemutat erre egy lehetőséget.

### 3. táblázat

Blokkolási lehetőségek

Játékos	Vagyon	Talmudi	Arányos	Módosított	Korlátos	Véletlen
		(TR)	(P)	arányos	egyenlő	érkezés
		szabály				
$d^1 = 100$	100	25	0	25	0	29
	200	40	33	35	0	29
	300	70	70	65	0,01	60
$d^2 = 200$	100	25	80	25	0	34
	200	75	63	80	49	83
	300	110	108	110	101,13	100
$d^3 = 300$	100	50	70	50	100	37
	200	85	104	85	151	88
	300	120	122	125	198,86	140

Könnyen ellenőrizhető, hogy a megadott hasznossági függvény mellett a 3. táblázatban szereplő elosztások magasabb hasznosságot eredményeznek, mint a 2. táblázatban szereplők.

Érdekes megfigyelni, hogy míg a marginális vektorok benne vannak a gyenge szekvenciális magban, a Shapley-érték (RA szabály) blokkolható elosztáshoz vezet. (A megoldáshalmaz tehát nem konvex.)

A korlátos egyenlő díjazás szabálya viszont viszonylag nagy általánossággal olyan elosztást eredményez, ami eleme a gyenge szekvenciális magnak.

2. TÉTEL • Minden  $i \in N$  hasznossági függvénye legyen  $u^i(x^i) = \sum_{s \in S} \rho_s z(x_s^i)$  alakban adott, ahol  $\rho_s$  az  $s$  világállapot objektív valószínűsége,  $z$  pedig egy differenciálható, konkáv függvény. Ekkor a korlátos egyenlő díjazás szabálya szerinti elosztás eleme a sztochasztikus csődjáték gyenge szekvenciális magjának.

BIZONYÍTÁS: lásd *Habis–Herings* [2012].

A 2. TÉTEL bizonyításának kiemelendő tanulsága, hogy a CEA szabályból következő elosztás megoldás a következő korlátos optimalizálási feladatra:

$$\sum_{i \in C} u^i(x^i) \xrightarrow{x^C} \max$$

feltéve, hogy:  $\sum_{i \in C} x_s^i = v_s(C)$ , minden  $s \in S$ -re, és

$$\sum_{i \in D} x_s^i = v_s(D), \text{ minden } s \in S\text{-re, és } \emptyset \neq D \subsetneq C\text{-re.}$$

Azaz az adott elosztás maximalizálja a játékosok összes hasznát azon elosztások halmazán, melyek minden aljátékban a klasszikus magban vannak.

### Záró megjegyzések

A kooperatív játékelméletben a különböző elosztási szabályok jóságát azok megfelelő axiomatizálásával szokás alátámasztani. A csődjátékok esetében számos szabály esetében léteznek különböző kívánatos tulajdonságokat tartalmazó megoldások. A 2. TÉTEL alapján azt mondhatjuk, hogy kötelező érvényű megállapodások hiányában egyedül a korlátos egyenlő díjazás szabálya rendelkezik meggyőző tulajdonságokkal:

1. (gyenge szekvenciális) magbeli,
2. maximalizálja a játékosok összes hasznát a stabil elosztások halmazán,
3. egyenlően kezelő,
4. invariáns a követelések csonkítására: ha egy adott világállapotban egy követelés meghaladja a világállapotbeli vagyont, a követelés a vagyon nagyságában maximumálható az eredmény megváltozása nélkül,
5. lehetséges a dekompozíció: ha a vagyonnak csak egy részét osztjuk fel előbb a CEA szabály szerint, majd (a követeléseket e szerint csökkentve) a maradék vagyont is a CEA szabály szerint osztjuk fel, akkor az így kapott összes kifizetés megegyezik az eredetivel.

A 3., 4. és 5. tulajdonság akkor és csak akkor igaz, ha az elosztás CEA szerinti (*Dagan* [1996]). Ha feladjuk az egyenlően kezelő axiómát vagy akár csak a 2. tulajdonságot, akkor más, kevésbé kívánatos elosztások is szóba jöhetnek; például a diktátor szabály. E szerint minden világállapotban először az első játékos veheti ki a követelésének megfelelő részt a vagyomból, utána a kettes, végül a hármas,

egészen addig, amíg a vagyon el nem fogy. Ezt a módszert alkalmazva a talmudi példában a hármas játékosnak soha nem jut semmi. A diktátor szabályra is igaz azonban az 1., 4. és 5. tulajdonság.

A csődprobléma természetesen nem csak elméleti szempontból érdekes, nyilvánvalóan a fenti elemzésnek rendkívül releváns tanulságai lehetnek a gyakorlatra nézve is. A fejlett világ minden országában törvény szabályozza a csődeljárás gyakorlatát. E törvények sokszor leteszik a voksukat egy-egy elosztási szabály mellett. A legnépszerűbb eljárás a korábban ismertetett szabályok közül az arányos szabály alkalmazása; ezt írják elő például Ausztráliában, Németországban és Indiában, de az Európai Újjáépítési és Fejlesztési Bank (EBRD) is ezt a módszert tartja igazságosnak (Averch [2000]).

Az arányos szabályról azonban beláttuk, hogy bizonytalanság esetében blokkolható, azaz a felek megállapodhatnak egy másik elosztásban, ami mindenkinek magasabb kifizetést biztosít és stabil. A gyakorlatban ez azt jelenti, hogy ahol a törvény arányos elosztást ír elő, ott a feleknek megéri megegyezésre jutniuk a vagyon felosztásáról még a hivatalos csődeljárás megkezdése előtt.

A tanulmányban ismertetett elméleti keret azonban nem csak a csődprobléma példájára alkalmazható. Számos olyan valós probléma létezik, ahol a kooperációból származó hasznok (például kartell) vagy akár költségek (például közös beruházás, fejlesztés) bizonytalanok lehetnek, hiszen a gazdasági környezet nem mindig kiszámítható. A gyenge szekvenciális mag ilyen esetekben is jó támpontot nyújthat.

## Hivatkozások

- AUMANN, R. J.–MASCHLER, M. [1985]: Game Theoretic Analysis of a Bankruptcy Problem from the Talmud. *Journal of Economic Theory*, Vol. 36. No. 2. 195–213. o.
- AVERCH, C. H. [2000]: Bankruptcy laws: what is fair? *Law in transition Focus on Insolvency Law*, tavaszi szám, 26–33. o.
- BESTER, H. [1984]: Core and equilibrium in incomplete markets. *Journal of Economics*, Vol. 44. No. 3. 255–266. o.
- CURIEL, I. J.–PEDERZOLI, G.–TIJS, S. H. [1989]: Sequencing games. *European Journal of Operational Research*, Vol. 40. No. 3. 344–351. o.
- DAGAN, N. [1996]: New Characterization of Old Bankruptcy Rules. *Social Choice and Welfare*, 51–59. o.
- GILLIES, D. B. [1959]: Solutions to general non-zero-sum games. Megjelent: *Tucker, A. W.–Luce, R. D. (szerk.): Contributions to the Theory of Games IV*. Princeton University Press, *Annals of Mathematics Studies*, 40. sz. 47–85. o.
- GRANOT, D.–MASCHLER, M.–OWEN, G.–ZHU, W. R. [1996]: The kernel/nucleolus of a standard tree game. *International Journal of Game Theory*, Vol. 25. No. 2. 219–244. o.
- GROSSMAN, S. J. [1977]: A characterization of the optimality of equilibrium in incomplete markets. *Journal of Economic Theory*, Vol. 15. No. 1. 1–15. o.
- HABIS HELGA–HERINGS, P. J. J. [2010]: A Note on The Weak Sequential Core of Dynamic TU Games. *International Game Theory Review*, Vol. 12 No. 4. 407–416. o.

- HABIS HELGA–HERINGS, P. J. J. [2011a]: Core concepts for incomplete market economies. *Journal of Mathematical Economics*, Vol. 47. No. 4. 595–609. o.
- HABIS HELGA–HERINGS, P. J. J. [2011b]: Transferable Utility Games with Uncertainty. *Journal of Economic Theory*, Vol. 146. No. 5. 2126–2139. o.
- HABIS HELGA–HERINGS, P. J. J. [2012]: Stochastic Bankruptcy Games. IEHAS Discussion Papers 1205, MTA KTI, 2012.
- KOUTSOUGERAS, L. C. [1998]: A two-stage core with applications to asset market and differential information economies. *Economic Theory*, Vol. 11. No. 3. 563–584. o.
- KRANICH, L.–PEREA, A.–PETERS, H. [2005]: Core concepts for dynamic TU games. *International Game Theory Review*, Vol. 7. No. 1. 43–61. o.
- LITTLECHILD, S. C.–OWEN, G. [1973]: A Simple Expression for the Shapley Value in a Special Case. *Management Science*, Vol. 20. No. 3. 370–372. o.
- O’NEILL, B. [1982]: A Problem of Rights Arbitration from the Talmud. *Mathematical Social Sciences*, Vol. 2. No. 4. 345–371. o.
- PINILES, H. [1861]: Darkah shel Torah. Forester, Bécs.
- PREDTETCHINSKI, A.–HERINGS, P.–PETERS, H. [2002]: The strong sequential core for two-period economies. *Journal of Mathematical Economics*, Vol. 38. No. 4. 465–482. o.
- REPULLO, R. [1988]: The core of an economy with transaction costs. *Review of Economic Studies*, Vol. 55. No.3. 447–458. o.
- THOMSON, W. [2003]: Axiomatic and Game-theoretic Analysis of Bankruptcy and Taxation Problems: A Survey. *Mathematical Social Sciences*, Vol. 45. No. 3. 249–297. o.