Közgazdasági Szemle, LVIII. évf., 2011. szeptember (727–742. o.)

BADICS TAMÁS

Az arbitrázs preferenciákkal történő karakterizációjáról

Köztudott, hogy az arbitrázsmentesség feltétele a befektetők preferenciáival kapcsolatban mindössze a monotonitást tételezi fel, azonban kevésbé ismert, hogy a folytonos idejű modellekben használatos *nincs ingyenebéd* és a *nincs elhalványuló kockázat melletti ingyenebéd* feltételek implicit módon milyen megkötéseket tartalmaznak a befektetők preferenciáira vonatkozóan. A *Frittelli* [2004] által bevezetett úgynevezett piaci ingyenebéd fogalma segítségével nemcsak hogy lehetségessé válik az arbitrázsfogalmak és preferenciák viszonyának formális elemzése, de segítségével egyrészt a pénzügyi matematika néhány klasszikus és mély matematikai állítása egészen új, közgazdasági értelmezést kap, másrészt a preferenciákon alapuló megközelítés érdekes adalékokkal szolgál egy, a közelmúltban – a kockázat *versus* bizonytalanság, pontosabban az ezzel szorosan összefüggő objektív *versus* szubjektív valószínűség közgazdaságtanban játszott szerepéről – kialakult vitához.*

Journal of Economic Literature (JEL) kód: D50, G11, G12, G13.

Az arbitrázselmélet egyik legfőbb vonzereje abban áll, hogy explicit módon nem alapoz a befektetők preferenciáira. Ez azonban nem jelenti azt, hogy implicit módon nem tételez fel semmit a preferenciákról. Azt szokás mondani, hogy az arbitrázsmentesség a befektetők preferenciáira vonatkozóan csak a monotonitást követeli meg (például *Dybvig–Ross* [1987]). Kevésbé ismert azonban, hogy az arbitrázsmentesség folytonos idejű modellekben használatos szigorításai – így a nincs ingyenebéd (*Kreps* [1981]) és a nincs elhalványuló kockázat melletti ingyenebéd feltételek (*Delbaen–Schachermayer* [1994]) – implicit módon milyen megkötéseket tartalmaznak a befektetők preferenciáira vonatkozóan. Cikkünk egyik célkitűzése, hogy áttekintse azokat az eredményeket, amelyek arról szólnak, hogy az arbitrázsmentesség feltétele – illetve annak a különféle modellekbeli megfelelője – milyen, a preferenciákra vonatkozó feltételekkel helyettesíthető. Az ismertetett eredmények közül az egyik legérdekesebb az az állítás (*Klein* [2006]), hogy a nincsen ingyenebéd krepsi fogalma bizonyos értelemben kockázatkerülő befektetőt feltételez. Az eredmények puszta ismertetése mellett cikkünkkel egyrészt arra szeretnénk felhívni a figyelmet, hogy egy, a preferenciákon alapuló megközelítésben a pénzügyi matematika néhány klasszikus és mély matematikai állítása egészen új, közgazdasági értelmezést nyer, másrészt a preferenciákon alapuló megközelítés érdekes adalékokkal szolgál egy, a közelmúltban a kockázat *versus* bi-

* A szerző köszönetét fejezi ki *Medvegyev Péternek*, valamint két névtelen bírálónak értékes megjegyzéseikért.

Badics Tamás adjunktus, Pannon Egyetem Gazdaságtudományi Kar közgazdaságtan tanszék (e-mail: badicst@gtk.uni-pannon.hu).

zonytalanság, pontosabban az ezzel szorosan összefüggő objektív *versus* szubjektív valószínűség közgazdaságtanban játszott szerepéről kialakult vitához (*Bélyácz* [2011], *Medvegyev* [2011] és *Száz* [2011]).[1]

Arbitrázs és az eszközárazás alaptétele

Véges valószínűségi mezőt feltételezve, akkor mondjuk, hogy egy pénzpiacon nincs arbitrázs, ha nem létezik olyan kereskedési stratégia, aminek révén nulla kezdeti vagyonból kiindulva pozitív valószínűséggel nyerhetünk a veszteség kockázata nélkül. Mondanivalónk szempontjából kiemelt jelentőségű az úgynevezett pénzügyi eszközök árazásának alaptétele, amely arra ad választ, hogyan tudjuk matematikailag karakterizálni azokat a modelleket, amelyekben nem létezik arbitrázs. Az állítás kimondásához szükségünk van a martingál fogalmára, ami a sztochasztikus folyamatok egy speciális osztályát jelöli.

Egy sztochasztikus folyamat martingál, ha tetszőleges $t > s$ időpontokra teljesül, hogy a sztochasztikus folyamat t-edik időpillanatbeli értékének az s-beli információk alapján vett várható értéke megegyezik a folyamat s-beli értékével. A martingáltulajdonság lényege legegyszerűbben a számegyenesen vett véletlen bolyongás fogalmából kiindulva érthető meg. Képzeljük el, hogy az origóból kiindulva, minden periódusban egyenlő valószínűséggel vagy jobbra vagy balra lépünk egyet. Ekkor minden t-re, a t-edik időpontbeli helyzetünk egy valószínűségi változó. Ha történetesen a t-edik időpillanatban a számegyenes a pontjában vagyunk, akkor ebből a t-edik időpontból tekintve a $t + 1$-edik pillanatbeli helyzetünk várható értéke éppen a lesz, és ez természetesen független attól, hogyan jutottunk az a helyzetbe. A pénzügyi eszközök árazásának alaptétele[2] kissé pongyolán megfogalmazva azt állítja, hogy egy értékpapírpiacon akkor nincs „arbitrázs”, ha létezik egy az eredetivel ekvivalens valószínűségi mérték,[3] amelyre vonatkozóan az értékpapírok diszkontált árait leíró folyamat egy bizonyos értelemben „martingál”, vagyis létezik olyan új valószínűségi mérték, amely alatt pénzügyi eszközök segítségével nem lehet szisztematikusan átlagban nyerni. Hogy egészen pontosak legyünk, az állítás ebben a formában inkább csak egy alapelv, ami akkor válik ténylegesen igazolható állítássá, ha pontosan definiáljuk az arbitrázsmentesség és martingál fogalmait.

Ha a martingálmérték egyértelmű, akkor az egyfajta árfunkcionál szerepét tölti be, mivel a kockázatos kifizetések jelenlegi ára éppen a diszkontált kifizetés martingálmérték szerinti várható értéke lesz. Mivel a korai szakirodalomban a martingálmérték mint árazófunkcionál jelenik meg, és az alaptétellel összefüggésben a martingál fogalmának használata csak a hetvenes évek végétől vált általánossá, ezért martingálmérték helyett az egyszerűség kedvéért időnként inkább árazófunkcionálra fogunk hivatkozni.

Az arbitrázsmentesség végső soron azt állítja, hogy a lehetséges kompozit termékek között csak egy olyan van, amely nem negatív, nevezetesen az azonosan nulla.[4] Vagyis az arbitrázsmentesség azt állítja, hogy két halmaz csak egy közös pontban metszi egymást.[5] A közgazdasági matematikában triviálisan ismert észrevétel, hogy ez a helyzet jól jellemezhető a

[1] Az idézett cikkek egy az Alapítvány a Pénzügyi Kultúra Fejlesztésére által 2011 tavaszán, a Nemzetközi Bankárképző Központban rendezett műhelyen elhangzott előadások írott változatai.

[2] A *fundamental theorem of asset pricing* elnevezést hasonló értelemben először P. H. Dybvig és R. A. Ross használta (*Dybvig–Ross* [1987]).

[3] Két mérték ekvivalenciája azt jelenti, hogy mindkét mérték szerint ugyanazok a nullmértékű halmazok.

[4] Vagyis nem lehet olyan portfóliót összeállítani, amely 1 valószínűséggel nem negatív, miközben pozitív valószínűséggel pozitív.

[5] Egészen pontosan arról van szó, hogy a lehetséges portfóliók halmaza és a nem negatív valószínűségi változók halmaza csak egy pontban – a nulla pontban – metszik egymást.

szeparáló hipersíkokról szóló tétellel.[6] A tétel használatához két dolgot kell tenni: biztosítani kell, hogy a halmazok konvexek legyenek, és biztosítani kell, hogy zártak legyenek.

A konvexitás feltétele általában viszonylag egyszerűen garantálható, elég feltenni, hogy a lehetséges stratégiák konvex módon kombinálhatók legyenek. A dolog emlékeztet a játékelmélet kevert stratégiáinak bevezetésére. A stratégiai halmazok konvexitása egy olyan bevett és rutinszerűen használt feltétel a közgazdasági elméletben, amelynek használata jószerével már fel sem tűnik. Míg a stratégiai halmazok konvexitása például az általános egyensúlyelméletben széles körben használt, de azért vitatott feltétel, a pénzügyi elméletben minden további nélkül elfogadott.[7] A pénzügyi elméletben a konvexitás eléréséhez egyedül azt kell feltenni, hogy a pénzügyi termékekből szabadon portfóliót lehet csinálni, vagyis szabadon vehetjük a termékek lineáris kombinációit. Az egyedüli újszerűnek mondható probléma, hogy lehet-e a termékek negatív együtthatójú kombinációit venni, vagy sem.[8]

Miként látni fogjuk, a probléma az elválasztandó halmazok zártságával van, amely zártság biztosítása az alább ismertetett tételek bizonyításának legfőbb nehézsége. Ennek oka, hogy természetes módon a pénzügyi elmélet valószínűségi változókkal foglalkozik, és valószínűségi változók esetén már magának a konvergenciának a fogalma sem egyértelmű. Másképpen fogalmazva, a pénzügyi elmélet megalapozását adó arbitrázstételek matematikai szempontból lényegében megegyeznek a közgazdasági elmélet területén használt szokásos dualitási eszköztárral. A matematikai eszköztár elvi szintjén az eltérés egyedül abból származik, hogy mivel a modellek dinamikusak és sztochasztikusak is, ezért a matematikai objektumok, amelyek körében a konvex analízis szokásos gondolatait alkalmazni kell, matematikailag nagyon bonyolultak. Míg véges dimenziós esetben a stratégiai halmaz triviálisan zárt, mivel tetszőleges topologikus vektortér véges dimenziós altere zárt, a releváns dinamikus sztochasztikus modellekben – például, amikor az időhorizont végtelen, vagy az időparaméter folytonos, vagy csak egyszerűen nem végesen generált a valószínűségi mező – a feltételes követelések tere tipikusan végtelen dimenziós, és – ahogy funkcionálanalízisből tudjuk – ilyenkor a matematikai problémák zöme topológiai természetű, így többek között a stratégiai halmaz zártsága sem fog automatikusan teljesülni. Míg azonban a szeparációhoz szükséges zártság például a végtelen dimenziós általános egyensúlyelméletben viszonylag egyszerűen biztosítható, a szemimartingálárfolyamatokon alapuló Delbaen–Schachermayer-elméletben ez a kifizetések mögött álló sztochasztikus integrálfolyamatok rendszerének strukturális tulajdonságain múlik.[9]

Az arbitrázselméletben, az említett topológiai problémákon túlmenően külön problémát okoz a végtelen számú kereskedési periódus létezése. Végtelen számú kereskedési periódus esetén, korlátlan erőforrásra támaszkodva, az úgynevezett duplázási stratégiát követve, 1 valószínűséggel biztos pozitív kifizetéshez juthatunk, ezért ezeket a stratégiákat ki

[6] Ezt az elvet számtalan tételben használjuk. Jószerével ez az első olyan gondolat, amivel egy matematikus közgazdász tanulmányai során megismerkedik. A lineáris programozás dualitási tétele, a jóléti közgazdaságtan második tétele, a Kuhn–Tucker-tételek, a játékelmélet nyeregponttételei stb. A dualitáselméleten – kissé leegyszerűsítve – azokat a matematikai eredményeket értjük, amelyek a konvex halmazok hipersíkkal való elválaszthatóságára épülnek.

[7] Valójában a konvexitás a pénzügyi eszközök területén jóval természetesebb, mint az általános egyensúlyelméletben. Az oszthatatlanság megkövetelése mindig is az általános egyensúlyelmélet kritikájának egyik eleme volt. Az oszthatatlanság kérdése a pénzügyekben nem játszik szerepet.

[8] Érdekes módon a matematikai elméletben az egyik legfontosabb közgazdaságilag inspirált áttörés a feltételes optimalizációban a nem negatív változók bevezetése és az ebből eredő komplikációk kezelése volt. Ez nagyban hozzájárult a konvex analízis kidolgozásához. Mivel a pénzügyekben az egyes változók lehetnek negatívak is (vagyis megengedett a rövidre való eladás), a stratégia halmazok általában alterek, ami a tárgyalást egyszerűsíti.

[9] Általános esetben az alaptétel bizonyításának legnehezebb része annak bizonyítása, hogy az elérhető kifizetések halmaza a „nincs elhalványuló kockázat melletti ingyenebéd” feltétel teljesülése esetén gyenge–csillag zárt, ami alapvetően azon az állításon alapul, hogy egy rögzített szemimartingál szerinti sztochasztikus integrálok halmaza a szemimartingálok kvázinormált terének zárt altere (*Mémin* [1980], lásd *Medvegyev* [2007*b*]).

kell zárnunk a lehetséges stratégiák közül. Ennek eredményeképpen a stratégiai halmaz általános esetben már nem altér, hanem csak kúp lesz (*Harrison–Pliska* [1981]).

Végül érdemes megjegyezni, hogy a szeparáló hipersík létezésének bizonyítása az arbitrázselméletben és a közgazdaságtanban analóg problémákat vet fel, noha azok megoldása lényegesen eltérő. A véges dimenziós modell egy kedvező tulajdonsága, hogy a primer tér (általános egyensúlyelméleti terminológiát használva: a jószágtér, vagyis esetünkben a feltételes követelések tere) és a duális tér (vagyis az árrendszert, speciálisan a martingálmértéket tartalmazó tér) ugyanabban a koordinátarendszerben ábrázolható. Általánosabb és egy kicsit precízebb megfogalmazásban, tetszőleges n-dimenziós szeparált topologikus vektortér topologikusan izomorf[10] az n-dimenziós euklideszi térrel, így ebben az esetben nincs értelme sem egy absztrakt topológiafogalom bevezetésének, sem a primer- és duális terek megkülönböztetésének. Végtelen dimenziós topologikus vektortérben azonban a topológia megválasztása már nem egyértelmű, ezért jóval nehezebb biztosítani, hogy mind a primertér, mind annak topologikus duálisa[11] illeszkedjen a közgazdasági problémához. Végtelen dimenziós esetben explicit módon meg kell különböztetni a primerteret a duálisától, és ebben az esetben a szeparáló hipersíkoknak a duális tér elemei felelnek meg. Kézenfekvő, hogy a feltételes követelések terének valamilyen L^p teret válasszunk. Ekkor azonban ugyanazzal a matematikai problémával találjuk szemben magunkat, amivel az általános egyensúlyelmélet is sokáig küszködött az 1950-es, az 1960-as és az 1970-es években. Az általános egyensúlyelméletben a jószágtér általában valamely L^p tér, az egyensúlyi árrendszer pedig egy, a jószágtéren értelmezett folytonos lineáris funkcionál, vagyis az L^p duálisának eleme. Bárhogy is választjuk meg a p-t, a klasszikus Hahn–Banach-típusú tételek mechanikusan nem alkalmazhatók. Ha $p < \infty$ (például *Duffie–Huang* [1986], *Harrison–Kreps* [1979] és *Dalang–Morton–Willinger* [1990]), akkor problémát okoz, hogy az L^p tér pozitív ortánsának nincs belső pontja, ezért a Hahn–Banach-féle szeparációs tétel nem alkalmazható. Ha viszont $p = \infty$, akkor, mivel az L^∞ térnek a duálisa egy, az L^1 térnél bővebb halmaz, az árrendszer nem feltétlenül reprezentálható skalárszorzatként, vagyis esetünkben integrálként (*Jones* [1986] és *Lucas–Stokey* [1989]). A legtöbb közgazdasági alkalmazásban, így általában a pénzügyekben is, a jószágtér az L^∞ tér. Az általános egyensúlyelméletben az árrendszer L^1-beliségét ilyenkor a preferenciákra vonatkozó megkötésekkel lehet biztosítani (például *Bewley* [1972] és *Prescott–Lucas* [1972]). Nem nyilvánvaló azonban, hogy az arbitrázselméletben alkalmazott, a martingálmértékhez tartozó Radon–Nikodym-derivált L^1-beliségét eredményező szokásos feltételeknek mi köze van a befektetők preferenciáihoz. A dolgozat egyik célja ennek a kapcsolatnak a tisztázása.

Az alaptétel irodalmának rövid áttekintése[12]

A martingálmérték létezéséről szóló első állítást *Harrison–Pliska* [1981] bizonyítják arra az esetre, amikor a valószínűségi mező végesen generált. Azóta a tételnek számos általánosítása született. Ezek közül az egyik legismertebb a Dalang–Morton–Willinger-tétel,[13] ami már teljesen általános valószínűségi mezőből indul ki, de felteszi, hogy az időparaméter diszkrét, és az időhorizont véges. Sajnos, általánosabb modellekben az arbitrázsmentesség

[10] Vagyis algebrailag izomorf és homeomorf.

[11] Vagyis a primertéren értelmezett folytonos, lineáris funkcionálok tere.

[12] Terjedelmi okok miatt ebben az alfejezetben nem törekszünk teljességre, többek között nem kívánunk foglalkozni az alaptétel Girsanov-transzformáción alapuló bizonyításaival, valamint az alaptétel súrlódásos modellekre való kiterjesztéseivel sem. Az alaptétellel kapcsolatban további irodalmi utalásokat találhatunk *Delbaen–Schachermayer* [1994]-ben, valamint *Karatzas–Shreve* [1998]-ban.

[13] Lásd *Dalang–Morton–Willinger* [1990], egy modernebb feldolgozásban: *Medvegyev* [2002], [2006].

megkötése nem feltétlenül biztosítja a martingálmérték létezését, ezért például diszkrét időparaméter, de végtelen időhorizont vagy folytonos kereskedés esetén szükségünk van az arbitrázsmentességnél erősebb, topológiai megkötést is tartalmazó nincs ingyenebéd vagy a nincs elhalványuló kockázat melletti ingyenebéd feltételekre. Utóbbi fogalmak formális definiálásához vezessünk be néhány jelölést.

A továbbiakban S legyen egy rögzített szemimartingál.[14] Valamely H előre jelezhető folyamat S szerinti sztochasztikus integrálját $H \bullet S$ módon, az integrálfolyamat értékét a t-edik időpontban $(H \bullet S)(t)$ módon fogjuk jelölni. A $H \bullet S$ sztochasztikus integrál értelmezhető mint egy S diszkontált árfolyammal rendelkező eszközbe való olyan befektetés nettó eredménye, amely befektetés időbeli alakulását a H folyamat írja le. A H folyamatot fogjuk kereskedési stratégiának is nevezni. Mint azt említettük, végtelen sok kereskedési periódus esetén ki kell zárnunk a – korlátlan erőforrásokra támaszkodó – duplázási stratégia lehetőségét, ezért le kell szűkítenünk a lehetséges stratégiák halmazát. Az S-integrálható, előre jelezhető H folyamatot a-megengedettnek nevezzük, ha minden $t \geq 0$-ra $(H \bullet S)(t) \geq -a$. A folyamat megengedett, ha létezik egy a pozitív valós szám, amelyre a folyamat a-megengedett. Definiáljuk a K_0 konvex kúpot a következőképpen:

$$K_0 = \{(H \bullet S)(\infty)\text{: ahol a határérték létezik, és } H \text{ megengedett folyamat}\}.^{15}$$

A továbbiakban élni kívánunk a díjmentes lomtalanítás feltevésével, ennek megfelelően jelöljük C_0-lal a K_0-beli elemekkel dominálható függvények kúpját, azaz legyen $C_0 = K_0 - L^0_+$, legyen $C = C_0 \cap L^\infty$, továbbá jelöljük L^∞_{++}-szal a nullmértékű halmaztól eltekintve, nem negatív, de egy pozitív valószínűségű halmazon pozitív L^∞-beli kifizetések halmazát. Ha egy L^∞_{++}-beli kifizetés benne van a C halmazban, akkor *arbitrázsról*, ha benne van a C halmaz gyengecsillag-topológia szerinti lezártjában, akkor ingyenebédről, ha pedig benne van a C halmaz L^∞ tér normája szerinti lezártjában, akkor elhalványuló kockázat melletti ingyenebédről beszélünk. Ezen a ponton érdemes egy kicsit elgondolkodnunk az elhalványuló kockázat melletti ingyenebéd közgazdasági tartalmán. Az elhalványuló kockázat melletti ingyenebéd tehát egy L^∞_{++}-beli kifizetés, amely kereskedés révén tetszőlegesen és egyenletesen közelíthető. Vagyis akkor létezik elhalványuló kockázat melletti ingyenebéd, ha létezik egy olyan L^∞_{++}-beli kifizetés, hogy tetszőleges ε-hoz létezik egy kereskedési stratégia, amely nulla valószínűségi halmaztól eltekintve minden kimenetel esetén ε-nál jobban közelíti az adott kifizetést, speciálisan a lehetséges veszteségek maximuma is kisebb marad, mint ε. Mivel az ingyenebéd-fogalom esetében az egyenletes közelítés helyett a – nem metrizálható – gyengecsillag-topológiában vett közelítést kell alkalmaznunk, ezért ez utóbbi fogalom a fenti módon nem interpretálható.

Folytonos idejű modellben először *Kreps* [1981] igazolta azt az állítást, hogy a nincs ingyenebéd feltétele egyenértékű az ekvivalens martingálmérték létezésével. Bár Kreps ezen eredménye már általános szemimartingál-modellekre is könnyen általánosítható,[16] az

[14] Szemimartingálnak nevezzük azokat a folyamatokat, amelyek előállíthatók egy minden korlátos időintervallumon korlátos változású folyamat és egy lokális martingál összegeként, a lokálismartingál-tulajdonság pedig kissé leegyszerűsítve azt jelenti, hogy létezik a véletlentől függő intervallumoknak egy a teljes számegyenest lefedő rendszere, hogy az azokra megszorított és azokon kívül konstansnak definiált folyamat minden esetben martingál. A szemimartingálról elegendő annyit tudnunk, hogy az a sztochasztikus folyamatoknak egy meglehetősen általános osztályát jelöli, mely magában foglalja például a Poisson-folyamatokat, az Itô-folyamatokat, a diffúziós folyamatokat, valamint a Lévy-folyamatokat is, és a legáltalánosabb sztochasztikus folyamat, ami szerint egy viszonylag jó tulajdonságokkal rendelkező sztochasztikus integrált lehet definiálni. A szemimartingálokkal és a szemimartingál szerinti integrálás problematikájával a sztochasztikus folyamatok általános elmélete foglalkozik. A terület klasszikus, és máig leggyakrabban hivatkozott monográfiája *Dellacherie–Meyer* [1976/1980], modernebb feldolgozásban pedig lásd *Medvegyev* [2007*a*].

[15] Belátható, hogy ha teljesül az arbitrázsmentesség, akkor a végtelenben vett határérték létezik.

[16] Erre az eredményre a továbbiakban Kreps–Yan-tétel néven fogunk hivatkozni.

ebben szereplő nincs ingyenebéd fogalma, sajnos, közgazdaságtanilag nehezen értelmezhető. Szemimartingál-modellekre a probléma kielégítőnek tekinthető megoldását végül is F. Delbaen és W. Schachermayer adják meg. *Delbaen–Schachermayer* [1994] bebizonyítja, hogy egy lokálisan korlátos szemimartingál-modellben a nincs elhalványuló kockázat melletti ingyenebéd egyenértékű az ekvivalens lokális martingálmérték létezésével (a tétel egy feldolgozása megtalálható *Badics–Medvegyev* [2009]-ben), *Delbaen–Schachermayer* [1998] pedig – lényegesen eltérő megközelítést alkalmazva – bebizonyította, hogy az alaptétel kiterjeszthető a nem feltétlenül lokálisan korlátos esetre is. Ebben az esetben azonban a nincs elhalványuló kockázat melletti ingyenebéd az ekvivalens σ-martingálmérték[17] létezésével egyenértékű.[18]

Delbaen és Schachermayer eredményeinek fenti tárgyalásában, az eredeti cikkel összhangban, csak egydimenziós részvényár-folyamatokkal foglalkoztunk. A szerzők azonban megjegyzik, hogy az általuk adott bizonyítás minden nehézség nélkül általánosítható többdimenziós folyamatokra, vagyis arra az esetre, amikor a kockázatmentes kötvény mellett több alaptermékkel is kereskednek a piacon. Nem világos azonban, hogy ebben az esetben mit értünk többdimenziós sztochasztikus integrálon. Vajon a kereskedési stratégia nyereményét definiálhatjuk-e úgy, hogy komponensenként (eszközönként) vesszük az integrált, és aztán az így kapott sztochasztikus integrálokat összeadjuk? A legtöbb, Wiener-folyamatokra épülő alkalmazásban ez megtehető, és nem jelent megszorítást. *Cherny* [1998] azonban megmutatta, hogy általánosságban ez az út nem járható, és az alaptétel bizonyítása ilyen módon nem vihető át többdimenziós folyamatokra, mert többdimenziós esetben a komponensenkénti integrálra – ellentétben az úgynevezett sztochasztikus vektor integrállal – nem teljesül az úgynevezett Mémin-tétel, ami a Delbaen–Schachermayer-tétel bizonyításában központi szerepet játszik. Az n-dimenziós Wiener-folyamatokra épülő modellek esetében a két integrálfogalom ekvivalens, így a Mémin-tétel itt a komponensenkénti integrálra is teljesül. Az általános esetben a vektorintegrál fogalma a komponensenkénti integrál fogalmának kiterjesztése az integrandusok egy bővebb osztályára. Ennélfogva komponensenkénti integrál helyett vektorintegrált alkalmazva, az arbitrázsmentességnek egy erősebb fogalmához jutunk. *Cherny* [1998] bemutat egy olyan többdimenziós lokálisan korlátos szemimartingált, amire teljesül a „komponensenkénti" nincs elhalványuló kockázat melletti ingyenebéd feltétel, mégsem létezik hozzá ekvivalens σ-martingálmérték,[19] bizonyítva ezzel, hogy a sztochasztikus vektorintegrál fogalma a pénzügyi matematikában valóban fontos szerepet játszik.

A Delbaen–Schachermayer-tétel a pénzügyi matematika egyik csúcsteljesítménye.[20] Bizonyítása igen hosszadalmas, és a funkcionálanalízis, valamint a sztochasztikus folyamatok – P. A. Meyer és a strassbourgi iskola matematikusai által az 1960-as évek végétől kezdve kidolgozott – általános elméletének mély eredményeit használja. F. Delbaen és W. Schachermayer eredménye széles körben ismert, és számos szerző hivatkozza (például *Elliott–Kopp* [2005], *Karatzas–Shreve* [1998] és *Király–Száz* [2005]), azonban a felhasznált mély matematikai apparátus miatt annak bizonyítása a közgazdász számára nehezen megközelíthető. Kevésbé ismert azonban, hogy az alaptételnek létezik egy közgazdaságtanilag a Delbaen–Schachermayer-tétellel azonos tartalmú és mélységű, Frittelli nevé-

[17] Egy X folyamat σ-martingál, ha létezik egy M lokális martingál, és egy M-integrálható H folyamat, hogy $X = X_0 + H \bullet M$.

[18] Az eredeti 1994. évi cikk gondolatmenetét használva, *Kabanov* [1997] új bizonyítást adott az alaptétel nem feltétlenül lokálisan korlátos esetére, megmutatva, hogy a C kúp gyengecsillag-zártsága ekkor is teljesül.

[19] A σ-martingál fogalma lokális korlátos esetben megegyezik a lokális martingál fogalmával.

[20] A Bichteler–Dellacherie-tételből tudjuk, hogy a szemimartingál a legáltalánosabb sztochasztikus folyamat, amely szerint egy viszonylag jó tulajdonságú sztochasztikus integrál definiálható, ezért a Delbaen–Schachermayer-tétel a maga nemében igen általános állítás.

hez fűződő változata (*Frittelli* [2004], [2007]), amely az arbitrázsmentesség preferenciák segítségével történő karakterizációján alapul, és amelynek bizonyítása jóval egyszerűbb matematikai eszközöket igényel. A továbbiakban megmutatjuk, hogy ez az állítás és a Frittelli által bevezetett úgynevezett piaci ingyenebéd fogalma az arbitrázsmentesség és a preferenciák viszonyának megértéséhez kulcsfontosságú.[21]

Az arbitrázsmentesség és a preferenciák viszonya

A *nincs arbitrázs* megkövetelése a pénzügyekben széles körben elfogadott, és közgazdaságtanilag is indokolt, hiszen az arbitrázslehetőség létezése kizárná mind az egyensúly létezését, mind a befektető haszonmaximumának elérését, ugyanis egy arbitrázslehetőség létezése esetén – a költségvetési korláttól függetlenül – bármely állapotban az arbitrázslehetőség kihasználásával a hasznosság növelhető. Mivel az arbitrázslehetőség minden monoton preferenciarendezéssel rendelkező befektető számára lehetetlenné teszi a haszonmaximum elérését, ezért az arbitrázsmentesség kritériuma mögött nyilvánvalóan meghúzódik az a preferenciákra vonatkozó előfeltevés, miszerint a befektető számára a több az jobb, vagyis a befektető monoton preferenciarendezéssel rendelkezik. Ez utóbbi állítás magyarázatában azonban a legtöbb szerző (például *Dybvig–Ross* [1987]) nem megy túl a fenti ténymegállapításon, és kevésbé ismertek azok az eredmények, amelyek formalizáltan vizsgálják azt a nem triviális kérdést, hogy az arbitrázsmentesség és az azzal rokon erősebb feltevések burkoltan hogyan kötik meg a befektetők preferenciáját. A továbbiakban megszületésük időrendjében mutatjuk be azokat az eredményeket, amelyek az arbitrázs és a preferenciák kapcsolatának megértéséhez közelebb visznek. Mivel az arbitrázsmentesség feltételezése egyenértékű az árazófunkcionál létezésével, ezért először azt vizsgáljuk, hogy a preferenciákból milyen módon származtatható az árazófunkcionál. Ehhez induljunk ki az általános egyensúlyelmélet Arrow–Debreu-féle modelljéből.

Mint ismeretes, az eredetileg determinisztikus általános egyensúlyelméletet a feltételes jószág fogalmának bevezetésével először *Arrow* [1953] alkalmazta olyan helyzet leírására, ahol a szereplők indulókészletei bizonytalanok, vagyis függnek a megvalósuló világállapottól. Az ötletet később *Debreu* [1953] általánosította.

Vegyünk egy M számú szereplőből álló cseregazdaságot! Tegyük fel, hogy a gazdaság szereplői K számú jószágot fogyasztanak, és ezekből a jószágokból az egyes egyének rendelkezésére álló mennyiségek a bekövetkező világállapot függvényei, és az állapottér, vagyis a lehetséges világállapotok halmaza egy véges halmaz. Tegyük fel, hogy a gazdaság szereplői kereskedhetnek úgynevezett feltételes jószágokkal, és alkalmazzuk a determinisztikus általános egyensúlyelméletet a feltételes jószágok piacára. A k-adik jószághoz és egy adott kimenetelhez tartozó egységnyi feltételes jószág egy olyan jog, amely az adott kimenetel esetén egységnyi, minden más kimenetel esetén nulla mennyiségű – feltétel nélküli – k-adik jószágot biztosít a jog birtokosának. Úgy is mondhatnánk, hogy a feltételes jószágok valójában a fizikai jószágokra szóló feltételes követelések. Feltesszük tehát, hogy a gazdaság szereplői az első periódusban – még mielőtt tisztában lennének azzal, hogy ténylegesen melyik világállapot következett be – kereskedhetnek a feltételes jószágok piacán.[22] Ilyen módon tehát az eredetileg K dimenziós jószágteret egy KS dimenziós jószágtérré bővítettük ki. Tegyük fel, hogy a szereplők mindegyike rendelkezik

[21] Az alaptétel elemi szintű tárgyalása megtalálható például *Pliska* [1997], *Medvegyev* [2002], [2009] művekben (utóbbi talán a tétel legelegánsabb, egy egyszerű dualitási technikán alapuló bizonyítása), az alaptétel, illetve az azon alapuló kockázatsemleges árazás kamatlábmodellekre való alkalmazásával kapcsolatban érdekes adalékokat találhatunk a nemrégiben megjelent *Medvegyev–Száz* [2010] könyvben.

[22] Hangsúlyozzuk, ebben a periódusban nem jószágok, csupán a fenti értelemben vett „jogok" cseréje történik.

egy, az ezen a jószágtéren értelmezett preferenciarendezéssel. Tegyük fel továbbá, hogy a második periódusban az egyes szereplők által a tényleges fizikai – vagyis nem feltételes – jószágokból birtokolt mennyiség függ a kimeneteltől. Ekkor a – determinisztikus – walrasi egyensúly fogalmát a most bevezetett feltételes jószágokra alkalmazva az úgynevezett Arrow–Debreu-egyensúly fogalmához jutunk, és az általános egyensúlyelmélet szokásos feltevései mellett az egyensúlyi árrendszer létezik.

Ha a jószágok közül egyet pénznek tekintünk, akkor az ennek egységére vonatkozó, a ténylegesen realizálódott világállapottól függő feltételes követeléseket Arrow–Debreu-értékpapíroknak szokás nevezni. Az ω kimenetelhez tartozó Arrow–Debreu-értékpapír tehát egy olyan feltételes követelés, amely az ω kimenetel esetén egységnyi, minden más kimenetel esetén nulla kifizetést biztosít a követelés birtokosának. Az Arrow–Debreu-értékpapírok egyensúlyi árai tulajdonképpen a kimenetelekhez rendelnek számértékeket, amely számértékek egy korlátos mértéket definiálnak. Ennek a mértéknek a normálásával a kimenetelek árai egy valószínűségi mértéket határoznak meg. Ha a valószínűségi mező végesen generált, akkor minden feltételes követelés előállítható az Arrow–Debreu-értékpapírok lineáris kombinációjaként. Ebből következően többek között létezik kockázatmentes értékpapír. Ezek után már könnyen belátható, hogy tetszőleges értékpapír első periódusbeli egyensúlyi ára éppen a kockázatmentes értékpapír hozama szerint diszkontált második periódusbeli lehetséges árainak imént megkonstruált mérték szerinti várható értéke lesz. Vagyis a mi terminológiánk szerint a diszkontált árfolyam az ily módon definiált „fiktív" valószínűség szerint martingál.[23] Ezt a mértéket *Arrow* [1970] kockázatsemleges valószínűségnek nevezi.

Az Arrow–Debreu-értékpapírokkal való kereskedés modellje valójában nem túlságosan életszerű, de a modellnek van egy – empirikus kezelhetőség szempontjából – nem elhanyagolható következménye. Ha az általános egyensúlyi megközelítés helyett egy parciális egyensúlyi megközelítést alkalmazva feltételezzük, hogy a kereskedett értékpapíroknak nemcsak a második periódusbeli kifizetései, de az első periódusbeli árai is adottak, akkor az említett összefüggésből a martingálmérték már meghatározható. Ha eltekintünk az Arrow–Debreu-értékpapírokkal való kereskedéstől, de feltesszük, hogy a létező értékpapírokkal való kereskedés révén minden lehetséges jövőbeli pénzügyi kifizetés előállítható,[24] vagyis elég sokféle értékpapír van a piacon ahhoz, hogy kifeszítsék a logikailag lehetséges kifizetések halmazát, akkor a jövőbeli kifizetések a preferenciáktól – speciálisan a kockázattal szembeni attitűdtől – függetlenül[25] beárazhatók.

De térjünk most vissza az általános egyensúlyi megközelítéshez! *Arrow* [1953] megjegyzi, hogy a fenti Arrow–Debreu-féle egyensúlyi elosztás megkapható olyan módon, hogy feltesszük, a szereplők az első periódusban csak Arrow–Debreu-értékpapírokkal kereskedhetnek, a második periódusban pedig kereskedhetnek a jószágok piacán. A magyarázat egyszerű. Ha a szereplők kereskedhetnek a második periódusban a fizikai jószágokkal, akkor az első periódusbeli kereskedés egyetlen célja az, hogy a szereplők megosszák a vásárlóerejüket az egyes világállapotok között. Ezzel az eljárással az eredetileg SK számú jószágot tartalmazó határidős piac már csak egy S számú jószágból álló piaccá zsugorodott. Ahhoz azonban hogy a szereplők ne csak a pénzben mért vásárlóerejüket tudják simítani, hanem a tényleges fogyasztásukat is, előre kell látniuk a második periódusbeli azonnali

[23] Két időperiódus esetén, ha az első időpontban nincsenek valódi valószínűségi változók, akkor a martingál tulajdonság pontosan azt jelenti, hogy a második periódusban realizálódó valószínűségi változó várható értéke éppen az első periódusban felvett érték.

[24] Más szóval feltételezzük, hogy a piac teljes.

[25] Egészen pontosan arról van szó, hogy nincs szükség a hasznossági függvények explicit szerepeltetésére, de valójában az arbitrázsmentesség feltétele implicit módon feltételezi a preferenciák monotonitását.

árakat,[26] és csak akkor beszélhetünk egyensúlyról, ha a szereplők várakozásai konzisztensek a modellel, vagyis egyensúlyban minden egyes kimenetelre vonatkozóan az azonnali árakra vonatkozó várakozások megegyeznek a tényleges egyensúlyi azonnali árakkal.

A fenti gondolatot később *Radner* [1972] formalizálta és általánosította több periódus esetére. Az úgynevezett Radner-egyensúly abban az esetben is értelmezhető, ha Arrow–Debreu-értékpapírok helyett csak néhány kockázatos értékpapírral kereskedhetnek a gazdaság szereplői, ezáltal a Radner-egyensúly fogalma fontos kiindulópontjává vált mind a pénzpiacok egyensúlyi elméletének, mind a nem teljes piacok elméletének. Megmutatható, hogy a martingálmérték ebben az esetben a Radner-egyensúly elsőrendű feltételeiből származtatható. A martingálmérték ebben a modellben azt mutatja meg, hogy adott ω kimenetel esetére egy pótlólagos egységnyi ω kimenetelhez tartozó Arrow–Debreu-értékpapír hányszoros haszonnövekményt eredményez az egy pótlólagos egységnyi első periódusbeli biztos vagyonnövekedés haszonnövekményéhez képest.

Az általános egyensúlyelméleti megközelítésről most térjünk át egy olyan parciális egyensúlyi modellre, melyben a fent említett korlátozott számú pénzügyi eszköz ára adott. Ekkor egy teljes modellben az árazási probléma megoldásához a fentiek alapján az egyensúly feltételére nincs szükség, hiszen a martingálmérték – ami egy a replikálható követelések terén értelmezett árazófunkcionált reprezentál – a pénzügyi eszközök áraiból már meghatározható. Ehhez csupán fel kell használnunk azt a feltételt, miszerint tetszőleges értékpapír – speciálisan az összes Arrow–Debreu-értékpapír – első periódusbeli egyensúlyi ára éppen a kockázatmentes értékpapír hozama szerint diszkontált második periódusbeli árának a kockázatsemleges mérték szerinti várható értéke. Ezzel elérkeztünk egy fontos problémához. Ha az árazófunkcionál meghatározásához sem az egyensúly feltételére, sem a fogyasztók preferenciáira nincs szükség, akkor vajon mi az a konzisztenciafeltétel, ami lehetőleg az egyensúlynál enyhébb megkötést jelent, és egyúttal biztosítja az árazófunkcionál létezését. Ebben az összefüggésben vezetik be az arbitrázsmentesség, illetve általános valószínűségi mező esetén az életképesség vagy a nincs ingyenebéd fogalmait.

Ross [1978] belátja, hogy az arbitrázsmentesség feltételének teljesülése ekvivalens azzal az állítással, hogy egy, a replikálható követelések terén értelmezett lineáris funkcionálnak létezik egy, az összes elképzelhető feltételes követelések terére való kiterjesztése, amely szigorúan pozitív, vagyis amely minden Arrow–Debreu-értékpapírhoz pozitív számot rendel.

Mint említettük, a Radner-féle megközelítésben az árazófunkcionál meghatározásához elegendő csupán a befektetői haszon maximumának elsőrendű feltételét felhasználni. Ez a megfigyelés motiválja az úgynevezett *életképesség* fogalmát (*Harrison–Kreps* [1979], *Kreps* [1981], *Bellini–Frittelli* [2002], *Pliska* [1997] és *Loewenstein–Willard* [2000]). Akkor mondjuk, hogy egy piac életképes, ha létezik egy replikálható kifizetés és egy ahhoz tartozó – a replikálható kifizetések terén értelmezett – konvex és folytonos preferenciarendezés, amely szerint az adott kifizetés minden más replikálható kifizetéshez képest gyengén preferált. Harrison és Kreps a fent idézett cikkükben belátják, hogy egy általános – tehát nem feltétlenül véges valószínűségi mezős – modellben pontosan akkor teljesül az életképesség, ha a replikálható követelések terén értelmezett lineáris funkcionálnak létezik egy, az összes elképzelhető feltételes követelések terére való szigorúan pozitív, vagyis az Arrow–Debreu-értékpapírokhoz pozitív számot rendelő kiterjesztése, utóbbi pedig ekvivalens azzal, hogy létezik az ekvivalens martingálmérték. Ezt összevetve Kreps már idézett eredményével – azzal, hogy az ekvivalens martingálmérték létezése egyenértékű a nincs ingyenebéd feltétellel –, kapjuk, hogy egy modell pontosan akkor életképes, ha a modellben nincs ingyenebéd. Mivel az életképesség fogalma konvex preferenciákat felté-

[26] Ezen árakat természetesen nem tekintjük a modell által adottnak.

telez, ezért ez az ekvivalencia azt sugallja, hogy a nincs ingyenebéd megkötés valójában kockázatkerülő befektetőket feltételez. Később látni fogjuk, hogy a nincs ingyenebéd fogalma sokkal közvetlenebb módon is kapcsolatba hozható a preferenciák konvexitásával, ehhez azonban az Orlicz-terek elméletét kell segítségül hívni.

Sztochasztikus dominancia és piaci ingyenebéd

Láttuk tehát, hogy az arbitrázsmentesség feltevése implicit módon annyit feltételez a befektetőkről, hogy azok preferenciarendezése monoton, hiszen egy arbitrázslehetőség minden monoton preferenciákkal rendelkező befektető számára kívánatos. Azt is láttuk, hogy az *életképesség* ekvivalens a nincs ingyenebéd feltétellel, amit úgy is értelmezhetünk, hogy a nincs ingyenebéd feltétel a preferenciák konvexitását feltételezi. Felmerül tehát a kérdés, hogy létezik-e egy egységes fogalmi keret, aminek segítségével az arbitrázsfogalmak közötti eltérések a preferenciák eltérő voltára vezethetők vissza. Kézenfekvő megoldásnak tűnhet a sztochasztikus dominancia mint fogalmi keret használata. Azt mondjuk, hogy egy kockázatos A kifizetés elsőrendben sztochasztikusan dominálja a B kifizetést, ha minden növekvő és folytonos hasznossági függvénnyel rendelkező befektető gyengén preferálja A-t B-vel szemben. A sztochasztikus dominancia és az arbitrázs kapcsolatát vizsgálja *Jarrow* [1986]. Megmutatja, hogy egy teljes piacon pontosan akkor létezik arbitrázs, ha létezik két speciális tulajdonsággal rendelkező eszköz, amelyek közül az egyik egy bizonyos értelemben sztochasztikusan dominálja a másikat. Jarrow konstrukciója meglehetősen bonyolult, de mindenesetre az első olyan próbálkozásnak tekinthető, ami formalizáltan próbál közvelen kapcsolatot teremteni az arbitrázsmentesség és a befektetők preferenciájának monotonitása között.

A sztochasztikus dominancia alapgondolatát fejleszti tovább Frittelli *piaci ingyenebéd* fogalma. Látni fogjuk, hogy a *piaci ingyenebéd* fogalom a különböző arbitrázsfogalmak[27] lezárásoperátorait meghatározó topológiafogalmaknak a befektetők hasznosságfüggvényeit jellemző analitikus tulajdonságait felelteti meg. A befektető preferenciarendezését alapul véve, azt mondhatjuk, hogy az arbitrázslehetőség azt jelenti, hogy nulla kiinduló vagyonnal kereskedés révén egy olyan véletlen f kifizetéshez juthatunk, amely felbontható egy w nem negatív és egyúttal pozitív valószínűséggel pozitív értéket felvevő kifizetés, valamint egy olyan q véletlen kifizetés összegére, amelynek várható hasznossága – bármely monoton hasznosságfüggvényt alapul véve – legalább akkora, mint az azonosan nulla kifizetésé. Ezt a gondolatmenetet általánosítja Frittelli piaci ingyenebéd fogalma. Ahogy azt korábban láttuk, az arbitrázsmentesség feltétele általános esetben nem garantálja az ekvivalens martingálmérték létezését, ezért egy erősebb feltételre volt szükségünk, ehhez viszont bővítenünk kellett a kizárandó arbitrázslehetőségek halmazát. A fenti megközelítést figyelembe véve, ez megtehető oly módon, hogy a fenti f véletlen kifizetések esetében csak bizonyos monoton hasznossági függvényekre követeljük meg a fenti tulajdonságot. Ezen a ponton válik el a Delbaen–Schachermayer-féle és a Frittelli-féle megközelítés. Az előbbi ugyanis – mint azt látni fogjuk – a befektetők hasznossági függvényeire vonatkozóan, a monotonitáson túl, csupán a folytonosságot követeli meg, míg az utóbbi a konkavitást is.

A piaci ingyenebéd Frittelli-féle fogalmának definiálásához tehát tételezzük fel, hogy minden befektetőnek létezik egy vagyonra vonatkozó hasznosságfüggvénye, és két kereskedési periódus van, a jelen és a jövő. Ahhoz, hogy a két megközelítés közötti párhuzamot világosan lássuk, érdemes az arbitrázs korábban bevezetett fogalmából kiindulni. A továb-

[27] Itt az arbitrázst tág értelemben használjuk, tehát az arbitrázsfogalmak az arbitrázst, az ingyenebédet és az elhalványuló kockázat melletti ingyenebédet foglalják magukban.

biakban jelöljük L^{∞}_{++}-szal azon L^{∞}-beli feltételes követeléseket, amelyek nullmértékű halmaztól eltekintve, minden kimenetel esetén nem negatív, valamint pozitív valószínűséggel pozitív kifizetést biztosítanak a követelés birtokosának, de egy rövid gondolatmenet erejéig tegyük fel, hogy a valószínűségi mező végesen generált. Egy L^{∞}_{++}-beli w feltételes követelést a jelenben eladva, nyilván pozitív jelenbeli bevételhez jutnánk. Felmerül a kérdés, hogy vajon egy alkalmas kereskedési stratégia segítségével „fedezhető-e" a bizonytalan jövőbeli w kötelezettség. Vagyis létezik-e egy alkalmas nem pozitív kiinduló költségű stratégia, amelynek f eredménye valamilyen értelemben dominálja, fedezi w-t? Ebben az esetben egyfajta arbitrázsjövedelemhez jutnánk. Ha vissza akarjuk kapni az eredeti arbitrázsfogalmat, akkor ez a dominancia egyszerűen azt kell hogy jelentse, hogy $f \geq w$, vagyis hogy $f - w$ nem negatív. Az arbitrázsstratégia létezése tehát ekvivalens egy olyan L^{∞}_{++}-beli w elem létezésével, amelyre teljesül, hogy az összes replikálható f kifizetésekre képezve az f és a w függvények különbségének minimumát, ezen minimumok maximuma nem kisebb, mint nulla. Ezen maximális tulajdonsággal rendelkező f kifizetésre nyilvánvalóan az is teljesül, hogy tetszőleges monoton hasznosságfüggvényt feltételezve, az $f - w$ kifizetés várható hasznossága legalább akkora, mint az azonosan nulla kifizetés hasznossága, hiszen ezen várható hasznosság a különböző világállapotokbeli hasznosságok konvex konbinációja, aminek egy alsó korlátja a kifizetések minimumának hasznossága, ami a feltevésünk és a hasznosságfüggvény monotonitása miatt nem kisebb, mint a nulla kifizetés hasznossága. Megfordítva, ha valamely L^{∞}_{++}-beli w-re létezik egy replikálható f kifizetés, hogy bármely monoton hasznosságfüggvényre az $f - w$ kifizetés várható hasznossága legalább akkora, mint a nulla kifizetés hasznossága, akkor az f és a w függvények különbségének minimuma nem kisebb, mint nulla. Ellenkező esetben ugyanis egy olyan monoton hasznosságfüggvényt választva, amely a negatív számokon $-\infty$ értéket vesz fel, de mindenhol máshol véges értéket, erre a hasznosságfügvényre vonatkozóan a $f - w$ kifizetés várható hasznossága $-\infty$ lenne. A fentiek alapján megállapíthatjuk tehát, hogy f egy arbitrázst reprezentál. Ezek alapján már definiálhatjuk a piaci ingyenebéd fogalmát.

Azt mondjuk hogy egy piacon létezik a *monoton növekvő hasznosságfüggvényekre vonatkozó piaci ingyenebéd*, ha létezik egy olyan, L^{∞}_{++}-beli w kifizetés, hogy minden monoton növekvő hasznossági függvény, és minden az eredetivel ekvivalens $\mathbf{Q}$ valószínűségi mérték esetén

$$\sup_{f \in C} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[u(f - w)] \geq u(0).$$[28]

E gondolatmenettel véges állapotterre beláttuk, hogy pontosan akkor létezik a monoton növekvő hasznosságfüggvényekre vonatkozó piaci ingyenebéd, ha létezik arbitrázs. Természetesen a fentivel analóg módon definiálható a monoton növekvő és folytonos, továbbá a monoton és konkáv hasznossági függvényekre vonatkozó piaci ingyenebéd fogalma is. *Frittelli* [2004] megmutatja, hogy pontosan akkor létezik a folytonos és monoton növekvő hasznosságfüggvényekre vonatkozó piaci ingyenebéd, ha létezik elhalványuló kockázat melletti ingyenebéd, ugyanakkor belátja, hogy egy tetszőleges lokálisan korlátos szemimartingál-modellben pontosan akkor nem létezik a monoton növekvő és konkáv hasznosságfüggvényekre vonatkozó piaci ingyenebéd, ha létezik ekvivalens lokális martingálmérték.[29] Ez utóbbi eredményre a továbbiakban a Frittelli-féle alaptételként fogunk hivatkozni. E ponton nyilván felmerül az olvasóban, hogy a klasszikus arbitrázsmentességi fogalmak preferenciákkal történő karakterizációját az tenné teljessé, ha a krepsi ingyenebéd fogalmát is sikerülne a Frittelli-féle piaci ingyenebéd fogalmi keretében megadni.

[28] A képletben $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}$-val a $\mathbf{Q}$ valószínűségi mérték szerint vett várható értéket, C-vel pedig – korábbi jelölésünkkel összhangban – a nulla indulóvagyonnal kereskedés révén elérhető kifizetések halmazát jelöltük.

[29] Az eredményt *Frittelli* [2007] kiterjeszti tetszőleges, nem feltétlenül lokálisan korlátos szemimartingál-modellekre.

Nyugodtan állíthatjuk, hogy ez nemcsak lehetséges, de az eredmény minden várakozásunkat is felülmúlja. *Klein* [2006] ugyanis Orlicz-tér módszerekkel azt a meglepő állítást bizonyítja, hogy a krepsi ingyenebéd fogalma éppen a monoton növekvő és konkáv hasznossági függvényekre vonatkozó piaci ingyenebéd fogalmával egyezik meg.

A Frittelli-féle megközelítés következményei

Vegyük észre, hogy a nincs ingyenebéd feltevés Klein-féle karakterizációja révén közgazdaságtanilag interpretálhatóvá vált az az általunk korábban Kreps–Yan-tételnek nevezett állítás, hogy egy lokálisan korlátos szemimartingálmodellben a nincs ingyenebéd biztosítja az ekvivalens lokális martingálmérték létezését. Mivel az L^∞ tér topológiája finomabb, mint a nincs ingyenebéd fogalmában szereplő gyengecsillag-topológia, ezért a nincs elhalványuló kockázat melletti ingyenebéd feltétele jóval enyhébb, mint a nincs ingyenebéd feltétele. Ennélfogva, az említett könnyebb interpretálhatóság mellett, a Delbaen–Schachermayer-féle bizonyítás egy fontos érdeme az, hogy az ekvivalens lokális martingálmérték létezését egy igen enyhe feltétel mellett biztosítja. Az arbitrázsfogalmak karakterizációja alapján ez úgy is fogalmazható, hogy a Delbaen–Schachermayer-tétel esetében az implicit módon feltételezett hasznosságfüggvény-osztály bővebb, mint a Frittelli-tételben feltételezett függvényosztály, ezért a folytonos és növekvő hasznosságfüggvények szerinti piaci ingyenebédek halmaza szűkebb, mint a növekvő és konkáv hasznosságfüggvények szerinti piaci ingyenebédek halmaza.[30] Ezért a nincs növekvő és konkáv hasznosságfüggvények szerinti piaci ingyenebéd feltételből következik a nincs növekvő és folytonos hasznosságfüggvények szerinti piaci ingyenebéd feltétel, ennélfogva az előbbi állítás matematikailag mélyebb. A nincs ingyenebéd fogalmának Klein-féle karakterizációja alapján továbbá megállapítható, hogy a Frittelli-alaptétel tulajdonképpen a Kreps–Yan-tételhez hasonló mélységű állítás, és a két állítás ekvivalenciája Orlicz-tér módszerekkel egyszerűen bizonyítható.

Mivel mind a Delbaen–Schachermayer-tétel, mind a Frittelli-alaptétel az ekvivalens lokális martingálmérték létezésének ekvivalenciájáról szól, ezért a bennük szereplő két arbitrázsmentességi fogalom valójában ekvivalens. Így ha feltételezzük, hogy valamely pénzügyi piacon az árrendszer monoton növekvő és konkáv hasznossági függvénnyel rendelkező befektetőket feltételezve konzisztens,[31] akkor ez a piac a nem feltétlenül konkáv, de folytonos és növekvő hasznosságfüggvényű befektetők számára már nem tartogat új arbitrázslehetőségeket. A Delbaen–Schachermayer-féle elmélet egy érdekes mondanivalója tehát az, hogy ebben az esetben a piac konzisztenciájának vizsgálatakor a befektetők hasznosságfüggvényére vonatkozó konkavitási megkötés nem jelent megszorítást. Vegyük észre a párhuzamot a mikroökonómia dualitási elméletének egy ismert következményével! A termeléselmélet dualitáselve szerint a költséggörbéből a technológia minden közgazdaságtanilag fontos tulajdonsága leolvasható, ugyanakkor a költségfüggvényhez mindig található egy konvex inputkövetelmény-halmaz, amiből az származtatható. Ezek szerint a technológia konvexitása nem túlságosan megszorító feltételezés. Az imént kapott igen érdekes közgazdasági tartalmú állításnak a bizonyítása azonban – mivel alapvetően a Delbaen–Schachermayer-tételen alapul[32] – úgy tűnik, a sztochasztikus folyamatok általános elméletének felhasználása nélkül nem lehetséges.

[30] Vegyük figyelembe, hogy a konkáv függvények folytonosak is az értelmezési tartományuk belsejében.

[31] Vagyis nem létezik piaci ingyenebéd a Frittelli-féle értelemben.

[32] Vagyis – a Kreps–Yan-tétellel és a Frittelli-féle alaptétellel ellentétben – a C kúp topológiai tulajdonságain, ezért közvetve, a C kúpot definiáló sztochasztikus integrálfolyamatok halmazának szerkezetén alapul.

A szubjektív valószínűség szerepe

Elfogadva Savage megközelítését, az egyes világállapotokhoz hozzárendelt valószínűségek a szereplők lutrikon vett preferenciarendezéséből származtathatók, ezért ebből a nézőpontból a valószínűségek és a preferenciák kérdése szorosan összefügg.[33] Eddig a valószínűségi mértékről feltételeztük, hogy az a modell külső adottsága, és a befektetők erről alkotott vélekedései azonosak. *Harrison–Kreps* [1979] azonban megjegyzi, hogy az arbitrázsmentesség definíciójához szükséges valószínűségek a befektetőknek a tényleges valószínűségről alkotott szubjektív vélekedéseiként is interpretálhatók. Az idézett cikkben a várható hasznosság fogalma nem jelenik meg, ezért felmerül a kérdés, vajon milyen szerepet játszik az arbitrázselméletben a szubjektív valószínűség fogalma. A kockázatsemleges árazás logikájából következik, hogy az árazófunkcionál kiszámításához nincs szükség az eredeti objektív valószínűségi mértékre, legfeljebb azt kell megkövetelni, hogy az eredeti mértékre vonatkozóan a diszkontált árfolyamat – a választott modelltől függően – például Itô-folyamat vagy éppen diffúziós folyamat legyen, ugyanakkor vegyük észre, hogy az arbitrázs fogalma invariáns a valószínűség ekvivalens cseréjére vonatkozóan. Többek között ezzel magyarázható, hogy bizonyos sztochasztikus kamatlábmodellek esetén az alapegyenleteket már eleve a martingálmérték alatt szokás felírni. Ennek a gyakorlatnak a buktatóira *Medvegyev* [2010] hívja fel a figyelmet.

Az eredeti – objektív – valószínűség irrelevanciája azonban leginkább az eszközárazás szemimartingálokon alapuló megközelítésében kristályosodik ki. A szemimartingálok és így a sztochasztikus folyamatok – Markov-folyamatoktól független – általános elméletének[34] pénzügytani jelentőségére először *Harrison–Pliska* [1981] hívja fel a figyelmet. Megjegyzi, hogy például a Markov-tulajdonsággal ellentétben a szemimartingál-tulajdonság az ekvivalens mértékcsere után is megmarad, akárcsak az adaptáltság, az előrejelezhetőség és a lokális korlátosság. Ez tette lehetővé, hogy olyan elméletet sikerült kiépíteni, amely nagyrészt invariáns a mérték ekvivalens módosítására vonatkozóan, ami lehetővé teszi a mértékcserén alapuló sztochasztikus analízisbeli módszerek hatékony használatát. Érdemes megemlíteni, hogy az elhalványuló kockázat melletti ingyenebéd L^∞ terének használatát többek között az is indokolja, hogy az összes lehetséges L^p terek közül kizárólag ebben az esetben biztosítható, hogy az árazófunkcionál integrálként való reprezentálhatósága az ekvivalens mértékcserére nézve invariáns tulajdonság legyen.

Míg a Delbaen–Schachermayer-elméletben a szubjektív valószínűség gondolata csupán a mérték ekvivalens változtatásával szembeni invarianciában mutatkozik meg, a Frittelli-féle megközelítésben – lévén hogy alapvetően a várható hasznosság fogalmán alapul – már egyértelműen megjelenik, bár a szerzők a szubjektív valószínűség fogalmára explicit módon nem hivatkoznak. Frittelli ugyancsak a mértékcserére vonatkozó invarianciát hangsúlyozza azzal, hogy a piaci ingyenebéd fogalmában szereplő relációt valójában nemcsak az objektív valószínűség, hanem az összes, az eredetivel ekvivalens valószínűség szerint vett várható értékre is megköveteli. Az így kapott valószínűségek

[33] Terminológiánkban a Savage-féle elméletnek *Mas-Colell és szerzőtársai* [1995] általi felépítésére támaszkodunk.

[34] Köztudott, hogy *Doob* [1954] nyomán a martingálelmélet – bár nem játszott fontos szerepet – már az ötvenes években elvált a Markov-folyamatok elméletétől, a sztochasztikus integrál elmélete azonban egészen *Doléans-Dade–Meyer* [1970] megjelenéséig nem vált attól teljesen függetlenné. Ez utóbbi eredmény a sztochasztikus analízis robbanásszerű fejlődéséhez vezetett a hetvenes és nyolcvanas években, így kulcsfontosságúnak bizonyult a sztochasztikus analízis pénzügyi matematikai alkalmazhatósága szempontjából, és ez vezetett el *Harrison–Kreps* [1979] és *Harrison–Pliska* [1981] – cikkünk szempontjából kiemelkedő szerepet játszó – nevezetes eredményeihez (*Jarrow–Protter* [2004]). A Markov-folyamatoktól független általános elmélet később nagyrészt *Dellacherie–Meyer* [1976/1980] monográfiájában vált kidolgozottá.

halmazát Frittelli a befektetők valószínűségről alkotott vélekedéseiként interpretálja, és így minden befektető egy valószínűségi mértékkel és egy a biztos kimeneteleken értelmezett hasznosságfüggvénnyel azonosítható. Abban az esetben viszont, ha a befektetőket a Savage-féle megközelítésnek megfelelően nem a biztos kimeneteleken értelmezett hasznosságfüggvényükkel, valamint a valószínűségekről alkotott vélekedésükkel, hanem a lutrikon vett preferenciarendezésükkel azonosítjuk, akkor a piaci ingyenebéd definíciójában szereplő valószínűségek felfoghatók úgy is, mint Savage-értelemben vett szubjektív valószínűségek.

Összegzés

Tanulmányunkban áttekintettük az eszközárazás alaptételének főbb alakjait, bemutattuk, hogy ez a többé-kevésbé ismert gondolat miként kapcsolódik az általános egyensúlyelmélet gondolati rendszeréhez, valamint hogy a két tudományterület analóg topológiai problémákat vet fel. Rámutattunk, hogy bár a modern arbitrázselmélet szokásos Wiener-folyamatokon alapuló tankönyvi tárgyalásai részben elfedik a pénzügytan és a klasszikus közgazdaságtan kapcsolódási pontjait, és az arbitrázselmélet művelése egyre inkább a matematikusok és fizikusok privilégiumává válik, éppen a legáltalánosabb, úgynevezett szemimartingál-modellekre vonatkozó legújabb eredmények teszik lehetővé a két tudományterület közti analógiák mélyebb megértését.

Először ismertettük az arbitrázsmentesség klasszikus fogalmait: a nincs arbitrázs, nincs ingyenebéd és nincs elhalványuló kockázat melletti ingyenebéd fogalmakat, és a fontosabb kapcsolódó eredményeket, majd rámutattunk, hogy a martingálmérték az egyensúly feltételéből természetes módon mint árfunkcionál származtatható. Mondanivalónk szempontjából különleges jelentőségű az életképesség fogalma, amely az egyensúlyfeltételnek egy gyengítése, de már – lévén hogy a nincs ingyenebéd feltétellel ekvivalens – biztosítja a martingálmérték létezését. Az életképesség fogalma a befektetők preferenciáinak konkavitását tételezi fel, ami előrevetíti azt a sejtést, hogy míg az arbitrázsmentesség lényegében egyet jelent a monoton preferenciák feltételezésével, a nincs ingyenebéd feltevése kockázatkerülő befektetőket feltételez. Ezt az értelmezést azonban megnehezíti az életképesség és az arbitrázsmentesség fogalmainak eltérő szemléletmódja. A feltételezett kapcsolat tisztázásához a piaci ingyenebéd Frittelli-féle fogalma nyújt segítséget. Láttuk, hogy pontosan akkor létezik a monoton növekvő hasznosságfüggvényekre vonatkozó piaci ingyenebéd, ha létezik arbitrázs, valamint pontosan akkor létezik a folytonos és monoton növekvő hasznosságfüggvényekre vonatkozó piaci ingyenebéd, ha létezik elhalványuló kockázat melletti ingyenebéd, ugyanakkor érvényes az úgynevezett Frittelli-féle alaptétel: tetszőleges lokálisan korlátos szemimartingál-modellben pontosan akkor nem létezik a monoton növekvő és konkáv hasznosságfüggvényekre vonatkozó piaci ingyenebéd, ha létezik ekvivalens lokális martingálmérték. Végül pedig a sejtésünk igazolásaképpen belátható, hogy pontosan akkor létezik monoton növekvő és konkáv hasznossági függvényekre vonatkozó piaci ingyenebéd, ha létezik ingyenebéd, vagyis közgazdaságtanilag interpretálhatóvá vált, és a Frittelli-féle alaptétel révén új bizonyítást nyert a korábban említett úgynevezett Kreps–Yan-tétel. A Frittelli-féle megközelítésnek a legérdekesebb következményét azonban az jelenti, hogy a meglehetősen technikai jellegű Delbaen–Schachermayer-tételnek egy egészen újszerű közgazdasági jellegű – és a mikroökonómia dualitás elvét idéző – interpretációját teszi lehetővé, nevezetesen, hogy a pénzpiac konzisztenciájának – vagyis a nincs piaci ingyenebéd feltevés teljesülésének – vizsgálatakor a befektetők hasznosságfüggvényére vonatkozó konkavitási megkötés nem jelent megszorítást.

Hivatkozások

ARROW, K. [1953]: Le role des valeurs boursières pour la meilleuredes des risques. Econométrie. Centre National de la Recherche Scientifique, Párizs. Angolul: The Role of Securities in the Optimal Allocation of Risk. Review of Economic Studies, 1964, 31. 91–96. o.

ARROW, K. [1970]: Essays in The Theory of Risk Bearing. North-Holland, London.

BADICS TAMÁS–MEDVEGYEV PÉTER [2009]: A pénzügyi eszközök árazásának alaptétele lokálisan korlátos szemimartingál árfolyamok esetén. Szigma, 40. évf. 3–4. sz. 89–136. o.

BELLINI, F.–FRITTELLI, M. [2002]: On the Existence of Minimax Martingale Measures. Mathematical Finance, No. 12. Vol. 1. 1–21. o.

BEWLEY, T. [1972]: Existence of Equilibria in Economies with Infinitely Many Commodities. Journal of Economic Theory, 4. 514–540. o.

BÉLYÁCZ IVÁN [2011]: Kockázat, bizonytalanság, valószínűség. Hitelintézeti Szemle (megjelenés alatt).

CHERNY, A. S. [1998]: Vector Stochastic Integral in the First Fundamental Theorem of Asset Pricing. Proceedings of the Workshop on Mathematical Finance, INRIA, 149–163. o.

DEBREU, G. [1953]: Uné Économie de l'Incertain. Working Paper, Electricité de France.

DALANG, R. C.–MORTON, A.–WILLINGER, W. [1990]: Equivalent Martingale Measures and No-Arbitrage in Stochastic Securities Market Model. Stochastics and Stochastics Reports, 29. 185–201. o.

DELBAEN, F.–SCHACHERMAYER, W. [1994]: A General Version of the Fundamental Theorem of Asset Pricing. Mathematische Annalen, 300. 463–520. o.

DELBAEN, F.–SCHACHERMAYER, W. [1998]: The Fundamental Theorem of Asset Pricing, for Unbounded Stochastic Processes. Mathematische Annalen, 312. 215–260. o.

DELLACHERIE, C.–MEYER, P. A. [1976/1980]: Probabilités et potentiel. Vol I., Vol II., Hermann, Párizs.

DOLÉANS-DADE C.–MEYER, P. A. [1970]: Intégrales stochastiques par rapport aux martingales locales. Séminaire de Probabiliés IV, Lecture Notes in Mathematics, 124. 77–107. o.

DOOB, J. L. [1954]: Stochastic Processes. Wiley and Sons, New York.

DUFFIE, D.–HUANG, C-F. [1986]: Multiperiod Security Markets With Differential Information. Journal of Mathematical Economics, 15. 283–303. o.

DYBVIG, P. H.–ROSS, S. A. [1987]: Arbitrage. Megjelent: *Eatwell, J.–Millgate, M.–Neumann, P.* (szerk.): The New Pelgrave: A Dictionary of Economics. Macmillan, London, 100–106. o.

ELLIOTT, R. J.–KOPP, P. E. [2005]: Mathematics of Financial Market. Springer-Verlag, Berlin.

FRITTELLI, M. [2004]: Some Remarks on Arbitrage and Preferences in Securities Market Models. Mathematical Finance, Vol. 14. No. 3. 351–357. o.

FRITTELLI, M. [2007]: No arbitrage and Preferences. Instituto Lombardo – Accademia di Scienze e Lettere, LED, 179–199. o.

HARRISON, J. M.–PLISKA, S. R. [1981]: Martingales and Stochastic integrals in the Theory of Continous Trading. Stochastic Processes and their Applications, 11. 215–260. o.

HARRISON, J. M.–KREPS , D. M. [1979]: Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Market. Journal of Economic Theory, 20. 381–408. o.

HUANG, C. F.–LITZENBERGER, R. H. [1988]: Foundation of Financial Economics. North-Holland, New York.

JARROW, R. [1986]: The Relationship between Arbitrage and First Order Stochastic Dominance. The Journal of Finance, Vol. 41. No. 4. 915–921. o.

JARROW, R.–PROTTER, P. [2004]: A Short History of stochastic integration and mathematical finance: The Early Years. 1880–1970. The Herman Rubin Festschrift, IMS Lecture Notes, 45. 75–91. o.

JONES, L. E. [1986]: Special Problems Arising in the Study of Economies with Infinitely Commodities. Megjelent: *Hugo, F.* (szerk.): Models of Economic Dynamics. Springer-Verlag, Sonnenscheim, Berlin.

KABANOV, YU. M. [1997]: On the FTAP of Kreps–Delbaen–Schachermayer. Statistics and Control of Random Processes. The Liptser Festschrift, Proceedings of Steklov Mathematical Institute Seminar, 191–203. o.

KARATZAS, I.–SHREVE, S. [1998]: Methods of Mathematical finance. Springer-Verlag, New York.

Király Júlia–Száz János [2005]: Derivatív pénzügyi termékek árdinamikája és az új típusú kamatlábmodellek. Szigma, 36. évf. 1–2. sz. 31–60. o.
Klein, I. [2006]: A comment on Market Free Lunch and Free Lunch. Mathematical Finance, 16. 583–588. o.
Kreps, D. M. [1981]: Arbitrage and Equilibrium in Economies with Infinitely Many Commodities. Journal of Mathematical Economics, 8. 15–35. o.
Loewenstein, M.–Willard, G. A. [2000]: Local martingales, arbitrage and viability: Free snacks and Cheap Thrills. Economic Theory, 16. 135–161. o.
Lucas, R. E.–Stokey, N. L. [1989]: Recursive Methods in Economic Dynamics. Harvard University Press, Cambridge.
Mas-Colell, A.–Whinston, M. D.–Green, J. R. [1995]: Microeconomic Theory. Oxford University Press, New York.
Medvegyev Péter [2002]: A pénzügyi eszközök árazásának alaptétele diszkrét idejű modellekben. Közgazdasági szemle, 49. évf. 7–8. sz. 597–620. o.
Medvegyev Péter [2006]: A Dalang–Morton–Willinger-tétel. Szigma, 37. évf. 1–2. sz. 73–85. o.
Medvegyev Péter [2007*a*]: Stochastic Integration Theory. Oxford University Press, New York.
Medvegyev Péter [2007*b*]: Technical results for no-arbitrage theorems in continuous time. Kézirat.
Medvegyev Péter [2009]: A származtatott termékek árazása és annak problémái az egyensúlyelmélet szempontjából. Közgazdasági szemle, 56. évf. 9. sz. 769–789. o.
Medvegyev Péter [2010]: A hasznossági függvények és a kockázatsemleges mérték. Hitelintézeti Szemle, 9. évf. 6. sz. 487–496. o.
Medvegyev Péter [2011]: Néhány megjegyzés a kockázat, bizonytalanság, valószínűség kérdéséhez. Hitelintézeti Szemle (megjelenés alatt).
Medvegyev Péter–Száz János [2010]: A meglepetések jellege a pénzügyi piacokon. Nemzetközi Bankárképző Központ Zrt., Budapest.
Mémin, J. [1980]: Espace de semimartingales et changement de probabilité. Z.W. Verw. Geb, 52. 9–39. o.
Pliska, S. R. [1997]: Introduction to Mathematical Finance, Discrete Time Models. Blackwell, Oxford.
Prescott, E. C.–Lucas, R. E. [1972]: Price systems in Infinite Dimensional Space. International Economic Review, 13. 416–422. o.
Radner, R. [1972]: Existence of Equilibrium of Plans, Prices and Price Expectations in a Sequence of Markets. Econometrica, 40. 289–303. o.
Ross, S. A. [1978]: A Simple Approach to the Valuation of Risky Streams. Journal of Business, 51. 453–475. o.
Száz János [2011]: Valószínűség, esély, relatív súlyok: opciók és reálopciók. Hitelintézeti Szemle (megjelenés alatt).