Közgazdasági Szemle, LVIII. évf., 2011. június (552–564. o.)

TARJÁN TAMÁS

Egyenes vagy S alakú a Jánossy-féle trendvonal?

Hosszú távú egyensúlyi állapot Maddison adatai és az új növekedéselmélet tükrében

A technológiakövető országok a technológiavezetők trendjével normált, hosszú távú növekedési pályája S alakú pályát követ. Több olyan növekedési modellt sikerült megalkotni, amelyek S alakú pályán érik el hosszú távú egyensúlyi *(steady state)* állapotukat, de mindezt naiv várakozású vagy rövidlátó fogyasztásoptimalizálással, nem pedig a több mint nyolc évtizede ismert és legelterjedtebb Ramsey-féle fogyasztásoptimalizálás módszerével. Jelen cikk a Ramsey-féle fogyasztásoptimalizálással kapcsolatban két új eredményt tartalmaz. Bebizonyítja, hogy *1.* a Ramsey-féle optimalizálás az Aghion–Howitt-féle aggregált termelékenységi paraméterszabályozással párosítva nem képes az S alakú pálya modellezésére, *2.* az Aghion–Howitt-féle aggregált szabályozás módszertani elvén alapuló, de a szabályozásba a tőkét is számba vevő, kissé módosított Aghion–Howitt-féle szabályozás képes az S alakú tranzíciós dinamika modellezésére.*

Journal of Economics Literatrure (JEL) kód: B22, C32, E13, O11, O33, O47, N10.

Széles körben ismert és kutatott kérdés, hogy az innováció időbeli terjedése *S* alakú eloszlást követ. Tehát az, hogy egy új technológiát hány százalékban alkalmaznak az összes többihez képest egy adott gazdaságban, Gauss-eloszlást követ (aminek haranggörbe-alakú az idő szerinti deriváltja).[1] Már nem olyan széles körben ismert, hogy a technológiakövető országoknak a technológiavezető trendjével normált hosszú távú növekedési pályája is *S* alakú pályát követ. Több olyan növekedési modellt sikerült megalkotni, amelyek *S* alakú pályán érik el hosszú távú egyensúlyi állapotukat, de mindezt naiv várakozású vagy rövidlátó fogyasztásoptimalizálással, és nem a több mint nyolc évtizede ismert és legelterjedtebb Ramsey-féle optimalizálással.

A trendvonal a közgazdaságtanban már több száz éve használt fogalom, a tőzsdei árfolyamok időbeli alakulásának vizsgálatához és előrejelzéséhez. Ebben az esetben egyszerre két trendvonal is megfogalmazódik: egy alsó, amit támasztrendvonalnak, valamint egy felső, amit ellenállás-trendvonalnak neveznek. E kettő együtt a tőzsdei „lázgörbe" alakulásának alsó és felső határvonalát hivatott kijelölni. *Jánossy* [1966] trendvonalfogalma a felső, az úgynevezett ellenállás-trendvonalnak felel meg, ami a matematika nyelvén valamely makrogazdasági fejlődési mutató idősorához húzható felső burkológörbe. Ezt Jánossy legtöbbször logaritmikus skálán egyenes vonallal ábrázolta, de természetesen néha görbült trendvonalat is feltételezett és vizsgált. Napjainkban a széles körben elterjedt

* Ezúton szeretnék köszönetet mondani *Csillik Péternek* a 10 éves eredményes közös kutatásért és társszerzőségért, valamint a jelen cikk írása során adott hasznos tanácsaiért, ötleteiért.

[1] Az új technológia és az innováció terjedéséről az úttörő műnek számító *Rogers* [1962] óta a témának könyvtárnyi irodalma van.

Tarján Tamás a Budapesti Gazdasági Főiskola tudományos főmunkatársa (e-mail: Tarjan.Tamas@kkfk.bgf.hu).

személyi számítógépek korában az Excel diagramvarázslójával képzett idősorokhoz féltucatnyi trendvonaltípust választhatunk. Ezek nem két trendvonalat (egy felső és egy alsó burkológörbét) jelentenek, hanem velük párhuzamosan, közöttük és valahol „középen" haladó (a legkisebb négyzetek módszerével illesztett) egyetlen görbét. Jánossynak ezek felrajzolásához – még alig fél évszázada – a műszaki életben szokásos milliméterpapírt, logarlécet és görbevonalzót kellett használnia. Mi pedig, miután matematikai szabatossággal definiáljuk a technológiakövető ország és az *S* alakú növekedési pálya fogalmát, számítógépes trendillesztéssel demonstráljuk *Maddison* [2010] – 18 OECD-országra vonatkozó 138 éves – történelmi idősoraira, hogy a technológiai követők *S* alakú növekedési pályát jártak be. Központi kérdésünk ezek után az, hogy mikor és milyen feltételek mellett lehetséges az *S* alakú növekedési pálya modellezése az úgynevezett új növekedéselmélet segítségével (lásd *Meyer* [1995]). Olyan növekedési modelleket tárgyalunk, amelyeknél az *A* aggregált termelékenységi paraméter az egyik, míg a fizikai + emberi tőkét egyaránt magában foglaló *K* a másik termelési tényező:

$$Y = A^{(1-\alpha)}K^{\alpha}.$$

Ezen új és önállóvá váló, a K+F-hez és az innovációhoz kapcsolódó *A* termelési tényező a schumpeteri teremtő romboláson alapuló Aghion–Howitt-féle tényezőszabályozással együtt mára már az endogén növekedéselmélet egyik legfontosabb kutatási ágává vált (*Aghion–Howitt* [1992]). Ezt az ágat a termékek minőségét javító modellek alkotják, míg a másik *Romer* [1990] termékválaszték-modellje, amelyben az aggregált termelékenység a termékválaszték mértékének függvénye. Az általunk tárgyalt modellekhez mindkettőből kölcsönzünk modellelemeket és érveléseket. Jánossy Ferenc már közel félévszázada egyértelműen a schumpeteri megközelítés mellett tette le a garast, amikor azt bizonyította, hogy „[A]z új technikai vívmány terjedése a munka kvalitatív megváltozásán keresztül megy végbe" (*Jánossy* [1966] 153. o.).

Tanulmányunkban megmutatjuk, hogy az Aghion–Howitt-féle szabályozás, párosítva a Ramsey-optimalizálással nem képes az *S* alakú pálya modellezésére. E fontos negatív eredmény ismeretében az Aghion–Howitt-féle szabályozás módszertani elvén alapuló, de *A* mellé a *K* tőkét is számba vevő szabályozásra pedig bebizonyítjuk, hogy képes az *S* alakú tranzíciós dinamika előállítására.[2]

Mielőtt rátérnénk mondanivalónk részletes kifejtésére és bizonyítására, röviden foglaljuk össze az elmúlt két évtizedben *Dumke* [1990] óta a nemzetközi irodalomban tárgyalt Jánossy-hipotéziseket.

Jánossy eredeti hipotézise saját megfogalmazásában: „... tényadatok alapján félre nem érthető módon nyilvánvalóvá vált, hogy a helyreállítási periódus végpontját a gazdasági fejlődés trendvonala határozza meg" (*Jánossy* [1966] 111. o.).

1. Jánossy-hipotézis, ahogy azt a háborút követő európai növekedést elemző irodalom idézi: „A Jánossy által előrelátott pálya exogén módon adott, állandó ütemű, Harrod-semleges technikai haladáson alapuló természetes növekedési ütemű pályának tekinthető." (*Ark–Crafts* [1996] 416–417. o.)

2. Módosított Jánossy-hipotézis: „…, amely értelmében az esetleges növekedési ütem visszatér eredeti nagyságához, de egy annál magasabb jövedelmi szintre, mint az előzőleg lehetséges lett volna ugyanahhoz a Jánossy által feltételezett pályára" (*Ark–Crafts* [1996] 416–417 o.).

[2] Az *S* alakú növekedési pályát (tranzíciós dinamikát) már sikerült előállítanunk naiv várakozású vagy rövidlátó fogyasztásoptimalizálással (tehát nem az igen széles körben ismert és alkalmazott Ramsey-optimalizálással) és az Aghion–Howitt-féle szabályozás módszertani elvéhez hasonló tényezőszabályozással (lásd *Csillik–Tarján* [2006], [2007], [2009] és [2010]).

3. Fordított Jánossy-hipotézis: „… amely megjósolja, hogy amikor a növekedés visszatér a normál állapotába, akkor már egy olyan másik növekedésitrend-pálya mentén található, amelyet időben visszaextrapolálva az irányváltás pontjáig már gyorsabb növekedést mutat, mint az irányváltás előtt volt” (*Ark–Crafts* [1996] 416–417 o.).

4. Jánossy élestörés-hipotézise: „A termelés növekedését kifejező görbe a háború után – a mélypontról kiindulva – meredeken emelkedik, de a trendvonalat elérve megtörik, mégpedig olyan élesen, mintha egy falba ütközne” (*Jánossy* [1966] 111. o.). (Ezt *Tarján* [2000] modellezte egy egyszektoros *Barro–Sala-I-Martin* [1995] modell segítségével. A kiinduló *Jánossy-hipotézis*nek nevezett törvényszerűség az 1. és 4. *Jánossy-hipotézissel* ekvivalens.)

Jánossy eredeti hipotézisét „árnyalni” kellett, ami rávilágít arra a kérdésre, hogy esetleg Jánossy stacioner pályája (logaritmikus skálán ábrázolva) nem egyenes, hanem meggörbül. E kérdés megválaszolásához a továbbiakban egy vezető–követő endogén növekedési modell segítségével szeretnénk hozzájárulni. Ehhez azonban előbb néhány definíciót kell megfogalmaznunk.

Definíciók

A technológiakövető ország

Feltételezzük, hogy van egy technológiavezető ország, amely mindkét (A_F, K_F) termelési tényezőjében x ütemű exponenciális pályán halad. Az A_F-et a technológiai határnak is szokás nevezni, amit tehát egyik ország aggregált (A) termelékenységi paramétere sem múlhat felül, azaz $A \leq A_F$. Jelölje $k \equiv Ke^{-xt}$ egy adott ország K tőkéjének a technológiavezető x növekedési ütemével diszkontált értékét, k^* pedig annak hosszú távú egyensúlybeli értékét, amelyről feltételezzük, hogy létezik.

Egy ország technológiakövető, ha $A \leq A_F$ és $k(0) < k^*$, azaz az aggregált termelékenységi paraméter sohasem haladja meg a technológiavezetőét, és induláskor a tőkéje kevesebb, mint az x ütemmel diszkontált értéke a saját hosszú távú egyensúlybeli állapotában.

Az S alakú pálya definíciója

Egy technológiakövető ország normált $y \equiv Y/Y_F$ pályára azt mondjuk, hogy S alakú (ahol tehát a technológiavezető $Y_F \equiv e^{xt}$ pályájával normáltunk); ha $y(t)$ kétszer folytonosan differenciálható, $d[\ln y(0)]/dt < 0$, $d^2[\ln y(0)]/dt^2 > 0$, és alkalmasan választott $0 < t_m < t_i$ időpontokra igaz, hogy $d[\ln y(t_m)]/dt = 0$, $d^2[\ln y(t_i)]/dt^2 = 0$, valamint a megfelelő első és második deriváltak rendre a t_m és a t_i időpontokban váltanak előjelet. Végül pedig feltételezzük, hogy egy technológiakövető ország a technológiavezetővel párhuzamos, y^* saját hosszú távú egyensúlyi pályához konvergál. (Fontos megjegyezni, hogy – definíciónk szerint – a technológiavezető $y_F^* \equiv Y_F/Y_F = 1$ pályája egy vízszintes egyenes, míg a követők esetére széles körben elfogadott tény, hogy $y^* = 0{,}7 \sim 0{,}9$ közötti konstans érték.)

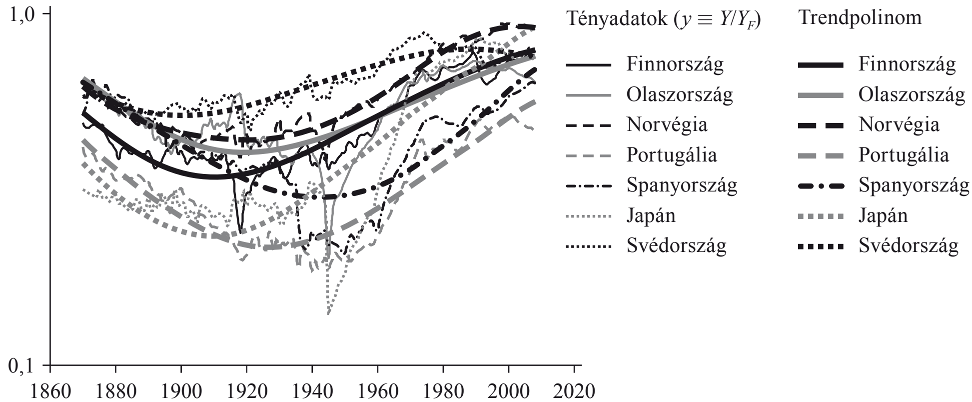
Szavakban kifejezve ez azt jelenti, hogy a $[0, t_i]$ intervallumban az $\ln[y(t)]$ pálya előbb egy alulról konvex U alakot ír le, ahol minimumhely egy köztes t_m időpontban van, majd a pálya logaritmusának a t_i-ben egy inflexiós pontja van, ahol az eddigi bal kanyarból áttér egy jobb kanyarra, mielőtt a vízszintes y^* hosszú távú egyensúlyi értékéhez tartana a végtelenben.

Polinomillesztéses trendvizsgálat

Most azt fogjuk demonstrálni történelmi statisztikák alapján, hogy 1870-től (az úgynevezett második ipari forradalomtól) eltelt 138 évben a technológiakövető országok (az Egyesült Államok mint technológiavezető exponenciális trendjével normált) pályája a fenti definíció szerinti *S* alakú pályát követett.

Tekintsük ehhez az *1–3. ábrát* a *Maddison* [2010] által vásárlóerő-paritáson megadott GDP/fő-adatok alapján! A tényadatok alakulását 12 technológiakövető OECD-országra mutatjuk be. A tényadatokhoz trendvonalként polinomillesztéses megközelítéssel az *S* alakhoz – mint a legegyszerűbb, páratlan függvénygörbét is leírni képes – harmadfokú polinomot választjuk. Az *1. ábrán* az a hét ország szerepel, amelyek 1870-ben mint követők az Egyesült Államok GDP/fő adatának 70 százaléka alatti, a másodikon pedig azt a másik ötöt, amelyek ezen adat 70–90 százaléka közötti értékről indultak. Az *S* alak az első diagramon a legkarakteresebb, azaz az induláskor az Egyesült Államoknál több mint 30 százalékkal szegényebb OECD-országok az első száz évben még csak egy *U* alakot írtak le. Az első 110 évben hét országból öt egymással párhuzamosan, pontosabban egymást nem átmetsző módon haladt; míg Japán legszegényebbként startolt, s a leggazdagabbak közt végzett, Spanyolország mindezt éppen fordítva tette. Mielőtt 1940 körül metszenék egymás harmadfokú trendjét, átmetszették egy-egy más országét is a tízes években.

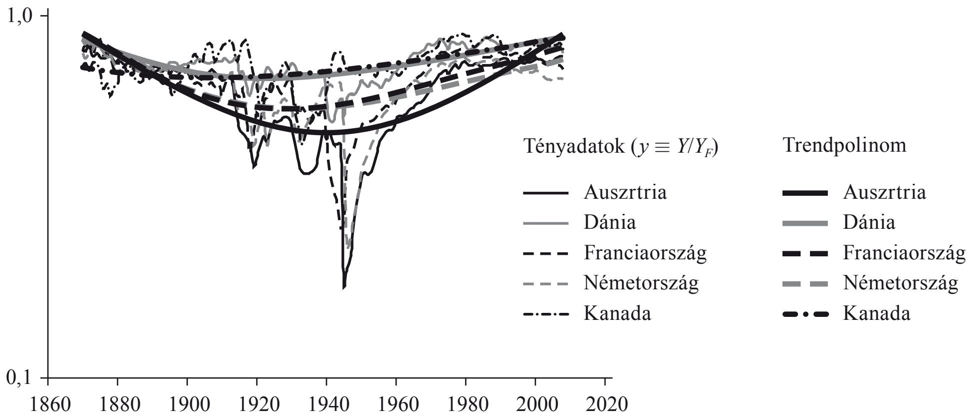
1. ábra
Hosszú távú növekedési pályák – I.
(1870-ben az Egyesült Államoknál több mint 30 százalékkal szegényebb OECD-országok)



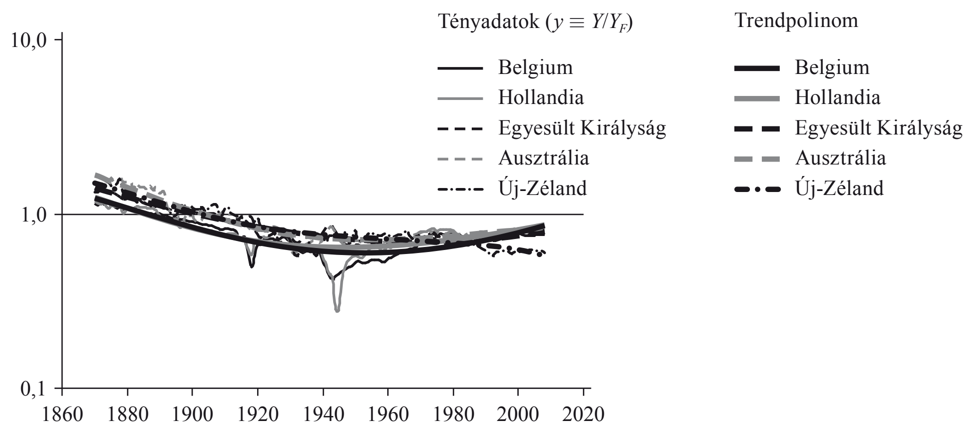
Az induláskor az Egyesült Államokhoz közelebbi, azaz a 70–90 százalék közötti szintről induló, további öt technológiakövető OECD-ország az *S* alakból még csak egy *U* alakot ír le a 138 év folyamán. Mivel azonban a trendvonalakat meghatározó tényadatok a periódus vége felé már határozottan vízszintessé válnak, vagy még enyhén vissza is esnek, ezek is már egy *S* alakú pálya megvalósulásának az ígéretét hordozzák magukban.

Végül a *3. ábra* a fennmaradó, induláskor még az Egyesült Államoknál is gazdagabb öt OECD-ország pályáját mutatja be. Ezeket az országokat nem is tekinthetjük a vizsgált 12 országhoz hasonlóan technológiakövetőknek 1870-től, legfeljebb a második világháború után mutattak a követőkhöz hasonló viselkedésformákat. Ennek ellenére – a teljesség kedvéért – érdekesnek tartjuk a trendpolinomjukkal együtt bemutatni ezeket is az első kettőhöz hasonló koordinátarendszerben.

2. ábra
Hosszú távú növekedési pályák – II.
(1870-ben az Egyesült Államoknál több mint 10–30 százalékkal szegényebb OECD-országok)



3. ábra
Hosszú távú növekedési pályák – III.
(1870-ben az Egyesült Államoknál gazdagabb OECD-országok)



Összefoglalásképpen elmondhatjuk, hogy *Maddison* [2010] történelmi idősorainak felrajzolása és az egyszerű úgynevezett polinomillesztéses trendvizsgálat már elegendő alapot szolgáltat annak feltételezésére, hogy a technológiakövetőknek az Egyesült Államok (hosszú távú exponenciális) trendjével normált pályája *S* alakot ír le.

Az *S alak* mint egyszerűsített (stilizált) tény pedig azt jelenti, hogy a technológiakövetés a második ipari forradalomtól számítva hosszú időn keresztül relatív hátrányt/visszaesést jelentett a technológiai vezetőhöz viszonyítva, ami csak később fordult át relatív előnynyé, a növekedési ütemet (felzárkózási sebességet) illetően. Ezután nyilvánvalóan adódik a kérdés, hogy a növekedéselmélet *vezető–követő* modelljei (beleértve a legújabb endogén modelleket is) képesek-e e jelenség leírására, modellezésére. A növekedéselméletben több mint nyolc évtizede a Ramsey-féle optimalizálás a legelterjedtebb, míg a két évtizedes múltra tekintő endogén növekedéselméletben az Aghion–Howitt-modell aggregált termelékenységi paraméterét tartalmazó modell az egyik legáltalánosabban használt, ami a (szintén csaknem nyolc évtizedes) schumpeteri növekedéselméletben gyökerezik (*Schumpeter* [1980/1934]). Ezen aggregált termelékenységi paraméter szabályozásának azonban nagyon fontos jellemzője és egyben korlátja, hogy kizárólag önmagát szabályozza, azaz a termelékenységi paraméter pályájának alakulása elszakad(hat) az egész gazdaságétól. Jelen cikkben be fogjuk bizonyítani, hogy e két legismertebb pillérre támaszkodó modell nem képes az *S* alak modellezésére, sőt mi több, a követők monoton csökkenő (növekedési) ütemmel tartanak a technológiavezetővel párhuzamos hosszú távú egyensúlyi állapotukhoz, azonban az Aghion–Howitt-féle szabályozás csekély (de az előbbiek alapján szükségszerű) változtatásával már képesek lesznek *S* alakú pályán haladni.

Képes-e az Aghion–Howitt-féle szabályozás az *S* alak modellezésére?

A növekedéselméletben a technikai haladás endogén termelési tényezőként való megjelenítése *Arrow* [1979/1962] termelés közben szerzett tudás hipotézisével kezdődik. Hasonló jelenséget Jánossy Ferenc is vizsgál, mégpedig könyvének A gép mint az ember tanítómestere című alfejezetében (*Jánossy* [1966] 225–226. o.). E termelési tényező a *technológiai határ* fogalmának bevezetésével (*Nelson–Phelps* [1966]), valamint a schumpeteri *teremtő rombolást* alkalmazó tényezőszabályozással (*Aghion–Howitt* [1992]) válik az endogén növekedéselmélet egyik legfontosabb kutatási ágává. Ezt az ágat a termékek minőségét javító modellek alkotják, amit röviden schumpeteri növekedéselméletnek nevezünk, míg a másik ágat *Romer* [1990] termékválaszték-modellje képviseli, amelyben az aggregált termelékenység a termékválaszték mértékének függvénye. „A technológia állapotának a termékválaszték számával történő összekapcsolásával a hosszú távú növekedés vizsgálatának egy kezelhető keretét kapjuk meg.” (*Barro–Sala-I-Martin* [1995] 213. o.)

A termékek minőségi javulásán alapuló modellek „egy másfajta összekapcsolás, amelyben a haladás egy adott termékválaszték minőségjavulásában jelenik meg.” (Uo.) A két megközelítés egymás kiegészítőjeként tekinthető. A jelen cikkünkben tárgyalt modellekhez mindkettőtől kölcsönzünk modellelemeket és érveléseket.

Az aggregált termelékenységi paraméter szabályozásának áttekintése

Vizsgálatunk középpontjában álló *Aghion–Howitt* [1992] tényezőszabályozással rokon modellek közül a legismertebbeket időrendben tartalmazza az *1. táblázat.*

Az *1. táblázatból* látható, hogy *Arrow* [1979/1962] úttörőnek számító szabályzásától eltekintve a többi öt modellben az aggregált termelékenység (A) idő szerint deriváltja ($\dot{A}$) egy alkalmasan választott $Z(A, K)$ függvény segítségével írható le:

$$\dot{A} = A \times Z(A, K).$$

1. táblázat
Az aggregált termelékenységi paraméter szabályozási modelljei

Modell	Képlete	Megjegyzés
1. *Arrow* [1979/1962]	$A = z\,K^{\theta}$	θ egy pozitív kitevő, ekvivalens megfogalmazásban: $\dot{A} = \theta(\dot{K}/K)A + \gamma A$, $0 < \theta < 1$, ahol $\gamma \equiv \dot{z}/z$)
2. *Nelson–Phelps* [1966]	$\dot{A} = f(h)(A_F - A)$	A_F a technológiai határt jelenti, amely önmagától nő időben valamilyen exogén ütemmel és h az ország emberitőke-állománya
3. *Conlisk* [1967]	$\dot{A} = a_0 A + a_1\, Y/L;\ a_0, a_1 > 0$	
4. *Aghion–Howitt* [1992]	$\dot{A} = \mu_n(\gamma - 1)\,A + \mu_m\,(A_F - A)$	A_F a technológiai határ
5. *Benhabib–Spiegel* [1994]	$\dot{A} = f(h)(A_F - A) + g(h)\gamma\,A$	A_F a technológiai határ, h az ország emberitőke-állománya
6. *Villanueva* [1994] (módosított *Arrow*)	$\dot{A} = \theta(K/L) + \gamma A,\ \theta > 0$	

A növekedési modell

Vegyük (Y) az egy főre jutó kibocsátás egy Cobb–Douglas-típusú termelési függvényét, ahol az aggregált termelékenységi változó (A) az egyik, míg az egy főre jutó fizikai + emberi tőkét magában foglaló változó (K) pedig a másik termelési tényező:

$$Y = A^{(1-\alpha)}K^{\alpha},$$

(ahol $0 \leq \alpha \leq 1$), amely így állandó skálahozadékot mutat mindkét tényezőjében.

Az Y kibocsátás mind fogyasztásra, mind a fizikai + emberi tőke beruházásra fordítható. Feltesszük, hogy az összetett fizikai + emberi tőke évente δ rátával értéktelenedik. A gazdaság forráskorlátja tehát

$$Y = A^{(1-\alpha)}K^{\alpha} = C + I_K \tag{1}$$

$$\dot{K} = I_K - \delta K, \tag{2}$$

ahol I_K a bruttó beruházás a fizikai + emberi tőkébe, és amelyet $\delta\,K$ pótlásra és $\dot{K}$ tőkeváltozásra fordítanak.

$$\dot{A} = A \times Z;\ \text{ahol } Z \equiv Z(A, K), \tag{3}$$

ahol az A paraméter $\dot{A}/A$ növekedési üteme tetszőleges A-tól és K-tól függő általános függvény, amely az Arrow-féle kivételével mindegyik *1. táblázatban* felsorolt szabályozást speciális esetként magában foglalja.

Ramsey-féle optimalizálás

Most pedig hajtsuk végre az ismert *Ramsey* [1928] szerinti optimalizálást, az (1), (2) és az *1. táblázatbeli* öt legismertebb szabályozást is magában foglaló általános (3) rendszerre:

$$\int_0^{\infty} U(C)\,e^{-\rho t}\cdot dt = \max.$$

Ekkor a Hamilton-egyenlet (nulla népességnövekedést feltételezve):

$$J = U(C)e^{-\rho t} + \nu(Y - C - \delta K) + \mu A \times Z,$$

ahol ν és μ rendre a $\dot{K}$ és $\dot{A}$ árnyékárai. A szokásos hasznossági függvényt alkalmazva,

$$U(C) = (C^{1-\theta} - 1)/(1 - \theta).$$

Az elsőrendű feltételt a szokásos módon véve, kapjuk, ha a J Hamilton-függvény C szerinti deriváltját nullával, valamint a két árnyékár $\dot{\nu}$ és $\dot{\mu}$ idő szerinti deriváltjait pedig rendre $-\partial J/\partial K$-val és $-\partial J/\partial A$-val tesszük egyenlővé, felhasználjuk az (1) költségvetési korlátot is.

$$\partial J/\partial C = C^{-\theta} e^{-\rho t} - \nu = 0 \quad \Rightarrow \quad \nu = C^{-\theta} e^{-\rho t} \quad \Rightarrow \quad C = (\nu\, e^{\rho t})^{-1/\theta}$$

$$-\partial J/\partial K = \nu(\delta - \alpha\, Y/K) - \mu\partial(A \times Z)/\partial K = \dot{\nu};$$

$$-\partial J/\partial A = -\nu(1 - \alpha)\, Y/A - \mu\partial(A \times Z)/\partial A = \dot{\mu}.$$

A K-ra, A-ra, ν-re és μ-re vonatkozó négyváltozós differenciálegyenlet-rendszer tehát a következő:

$$\dot{K} = Y - \delta K - C, \tag{4}$$

$$\dot{A} = A \times Z, \tag{5}$$

$$\dot{\nu} = \nu(\delta - \alpha\, Y/K) - \mu\partial(A \times Z)/\partial K, \tag{6}$$

$$\dot{\mu} = -\,\nu(1 - \alpha)\, Y/A - \mu\partial(A \times Z)/\partial A. \tag{7}$$

Vezessük be a technológiavezető $Y_F \equiv e^{xt}$ pályájával normált mennyiségeket! Emlékeztetünk, hogy az S alakú pálya definiálásakor már bevezettük az $y \equiv Y/Y_F = Ye^{-xt}$ jelölést. Most pedig legyen $k \equiv Ke^{-xt}$, $a \equiv Ae^{-xt}$ és $c \equiv Ce^{-xt}$! Vezessük be továbbá az $\eta \equiv \mu/\nu$, valamint a $\partial_A \equiv \partial\,(A \times Z)/\partial A$, $\partial_K \equiv \partial(A \times Z)/\partial K$ jelöléseket is! Ekkor nyilvánvalóan fennállnak a $\dot{K} = (\dot{k} + kx)\, e^{xt}$, $\dot{A} = (\dot{a} + ax)e^{xt}$, $\dot{\mu} = \dot{\eta}\nu + \eta\dot{\nu}$ összefüggések, amelyek a (4)–(7) egyenletekre történő alkalmazással k-ra, a-ra, c-re és η-ra a következő (8)–(12) négyismeretlenes differenciálegyenlet-rendszert adják, ahol y nem ötödik változó, hanem az y helyébe mindig a (8) egyenlet által megszabott alakot kell érteni, valamint a *reálmegtérülési ráta* a szokásos jelölésével sem egy újabb változót jelent, hanem azon az $r \equiv \alpha\, y/k - \delta$ kifejezést értjük:

$$y = a^{1-\alpha} k^{\alpha}, \tag{8}$$

$$\dot{k} = y - (\delta + x)k - c, \tag{9}$$

$$\dot{a} = a(-x + Z), \tag{10}$$

$$\theta\dot{c}/c = r - x\theta - \rho + \eta\partial_K, \tag{11}$$

$$\dot{\eta} = -\,(1 - \alpha)y/a + \eta(r - \partial_A) + \eta^2\partial_{K.} \tag{12}$$

Fontos megjegyeznünk, hogy az előbbi (8)–(12) egyenletekben szereplő kisbetűs, „normált” mennyiségek bevezetése tisztán matematikai célú, az S alakú pálya vizsgálatához „jól kézre álló”, transzformációs eszköz, de a Ramsey-féle optimalizálás a növekedéselméletben szokásos módon a (4)–(7) egyenletekben szereplő nagybetűs (nem normált) eredeti változókra történik.

Vezessük be a tőke/kibocsátás hányadosra a $\kappa \equiv k/y$ jelölést!

A fenti (8)–(12) egyenletek a hosszú távú egyensúlyi állapotban a következő (13)–(17) alakúak:

$$y^* = a^{*1-\alpha} k^{*\alpha}, \tag{13}$$

$$0 = 1/\kappa^* - \delta - x - c^*/\kappa^* \Rightarrow c^* = 1 - \kappa^*(\delta + x), \tag{14}$$

$$Z^* = x, \tag{15}$$

$$0 = r^* - x\theta - \rho + \eta^*\partial_K^* \Rightarrow \theta = \{r^* - \rho + \eta^*\partial_K^*\}/x, \tag{16}$$

$$0 = -(1-\alpha)\kappa^{*\alpha/(1-\alpha)} + \eta^*(r^* - \partial_A^*) + \eta^{*2}\partial_K^*. \tag{17}$$

A fenti egyenletekből a k, a, c és η hosszú távú egyensúlyi állapotbeli értékei meghatározhatók:

$$k^* = y^*\kappa^*,$$

$$a^* = y^*\kappa^{*-\alpha/(1-\alpha)}$$

$$c^* = 1 - \kappa^*(\delta + x).$$

Az η^* meghatározása pedig a következő:

Ha $\partial_K^* \equiv [\partial(A \times Z)/\partial K]^* \neq 0$, akkor egy másodfokú egyenletet kaptunk η^*-ra:

$$\eta^* = 0{,}5\{\partial_A^* - r^* \pm [(r^* - \partial_A^*)^2 + 4\partial_K^*(1-\alpha)\kappa^{*\alpha/(1-\alpha)}]^{0,5}\}/\partial_K^*.$$

Látni fogjuk, hogy a fenti egyenletnek reális paramétertartományban van megoldása, és az η^*-hoz tartozó y^* épp azt az arányt jelenti, hogy a követő ország a technológiavezető pályájának hány százalékához tart majd a végtelenben.

1. MEGJEGYEZÉS. Ha speciálisan $\partial_K \equiv \partial(A \times Z)/\partial K = 0$, azaz másként megfogalmazva: $Z(A, K)$ a K-tól nem, csak A-tól függ és így $Z(A, K) = Z(A)$; akkor a (11) egyenlet az úgynevezett Keynes–Ramsey-féle szabályra[3] redukálódik: $\dot{c}/c = (r - \rho)/\theta - x$.

Ramsey-optimalizálás esetén az Aghion–Howitt-féle szabályozás nem képes az *S* alak modellezésére

1. LEMMA. Ha $\partial_K \equiv \partial(A \times Z)/\partial K = 0$ és induláskor $k(0) < k^*$ teljesül, akkor $\gamma_k \equiv \dot{k}/k$ (szigorúan) monoton csökken a $[0, \infty)$ intervallumban.

BIZONYÍTÁS. „Az γ_k (szigorúan) monoton csökken, ha a gazdaság $k(0) < k^*$-ból indul." (*Barro–Sala-i-Martin* [1995] 90. o. függelék.) E tétel bizonyítása és az *1. megjegyzés* alapján az *1. lemma* nyilvánvalóan fennáll.

DEFINÍCIÓ. Aghion–Howitt-féle (A_F technológiai határtól mért), inverz távolsággal történő szabályozás[4]: $Z \equiv x + q\,(A_F/A - 1)$, ahol $q > 0$.

2. LEMMA. Aghion–Howitt-féle szabályozás esetén $\gamma_a(a \equiv Ae^{-xt})$ monoton csökken a $[0, \infty)$ intervallumban.

BIZONYÍTÁS. Mivel definíció szerint $A \leq A_F$, ezért $Z(A) \geq x$, így (10) miatt $\gamma_a = Z(A) - x \geq 0$ $\Rightarrow a$ monoton nő, és a_F konstans $\Rightarrow \gamma_a = q(a_F/a - 1)$ pedig monoton csökken a $[0, \infty)$ intervallumban. ■

[3] Lásd például *Barro–Sala-i-Martin* [1995] 65. o. (2.10) egyenletet, amelyet most értelemszerűen az itteni jelöléseinknek megfelelően egy kis módosítással idézünk.

[4] Ahol $x \equiv \mu_n(\gamma - 1)$, az Egyesült Államok hosszú távú növekedési üteme, μ_n az élenjáró innováció, $q \equiv \mu_m$ pedig az imitáció frekvenciája (lásd *Aghion–Howitt* [2006] 7–8. o.).

3. LEMMA. Aghion–Howitt-féle szabályozás esetén, ha induláskor $k(0) < k^*$ teljesül, akkor γ_y (szigorúan) monoton csökken a $[0, \infty)$ intervallumban.

BIZONYÍTÁS. Mivel az *1. lemma* szerint γ_k (szigorúan) monoton csökken és a *2. lemma* miatt pedig $\gamma_a = \gamma_A - x$ is monoton csökken, ezért a lineáris kombinációjuk, γ_y is (szigorúan) monoton csökken a $[0, \infty)$ intervallumban. ■

TÉTEL. Aghion–Howitt-féle szabályozás esetén az $y \equiv Y/Y_F$ technológiakövető pálya nem lehet *S* alakú, mert sem t_m minimumhelye, sem t_i inflexiós helye sincs.

BIZONYÍTÁS. A *3. lemma* miatt γ_y (szigorúan) monoton csökken a $[0, \infty)$ intervallumban, így nincs t_i inflexiója. Mivel a hosszú távú egyensúlyi állapotban $\gamma_y^* = 0$, így a $[0, \infty)$ intervallumban γ_y szükségképpen mindvégig pozitív volt, azaz $\gamma_y > 0$. Tehát az $y \equiv Y/Y_F$ pálya (szigorúan) monoton nő a $[0, \infty)$ intervallumban s így nincs t_m minimumhelye sem. ■

Módosított Aghion–Howitt-féle tényezőszabályozás az *S alak* modellezésére

Az *1. táblázatbeli* aggregált termelékenységi paraméterszabályozások közül a 4. Aghion-Howitt-féle tényezőszabályozástól eltekintve ahol, mint látható, $\dot{A}$ csak A-tól s annak A_F határától függ; a többi esetben A-n kívül függött még: $\dot{K}/K$ -tól, h-tól, Y/L-től s végül K/L-től. Tehát abban, hogy a technológia változása, $\dot{A}$ az Y kibocsátástól függ, *Conlisk* [1967] óta nincs újdonság, mi most csak azt tesszük hozzá, hogy a követők Y kibocsátásának is létezik egy Y_F határa,[5] és hogy az egy főre jutó Y kibocsátás az adott követő termékválaszték mértékének egy lehetséges közelítése, akkor Romerhez és Aghion–Howitt-szerzőpároshoz hasonló érveléssel a (18) tényezőszabályozáshoz (Y_F *a kibocsátási határtól mért távolság inverzével* történő szabályozáshoz) jutunk:

$$\dot{A} = \mu_n(\gamma - 1)A + \mu_m(Y_F/Y - 1)A, \tag{18}$$

ahol $\mu_n(\gamma - 1)$ a saját innovációból eredő termelékenységnövekedés, míg $\mu_m(Y_F/Y - 1)$ az imitációból. „Az előbbi esetben az ország élenjáró innovációt végez, amely biztosítja és javítja az élenjáró technológiát iparágában. Az utóbbi esetben az innováció csak imitálja/adaptálja a már máshol kifejlesztett technológiát." (*Aghion–Howitt* [2006] 7. o.)

Az előbbi, úgynevezett *kibocsátási határtól mért távolság inverzével* történő tényezőszabályozást egy másik érveléssel is származtathatjuk.[6]

Vegyük a követők Y kibocsátásának és az Y_F-hoz viszonyított szokásos $y \equiv Y/Y_F$ hányadosát! Ha most egy tetszőleges u ($y \le u \le 1$) arányt tekintünk, amely y-hoz képest épp (u/y)-szoros termékválasztékkal, azaz ennyiszer nagyobb – termékválasztékban is megtestesülő – technológiai tudással rendelkezik, akkor a fejlettebbek összes többlettudása az $[y, 1]$ szakaszon

$$\int_y^1 \frac{u}{y} d\ln u = \int_y^1 \frac{u}{yu} du = \left[\frac{u}{y}\right]_y^1 = \frac{1}{y} - 1.$$

[5] Jegyezzük meg, hogy míg az A_F technológiai határ általában a technológiai vezető A_{US} együtthatóját (aggregált termelékenységi paraméterét) jelenti, addig a követők Y kibocsátásainak Y_F határára azt is megengedjük, hogy eltérjen a technológiai vezető, Y_{US} kibocsátásától.

[6] Hasonló gondolatsoron alapuló tényezőszabályozásokat alkalmaztunk már a *Csillik–Tarján* [2006], [2007], [2009] és [2010] cikkekben is.

Persze még azt is feltételeztük, hogy az ilyen y-nál fejlettebb, u technológiájú országok és régiók folyamatosan és logaritmikus léptékben egyenletesen helyezkednek el a $[y, 1]$-ben. Végül feltesszük, hogy az imitációból származó, időegységre jutó $\dot{A}/A$ termelékenységnövekedés egy alkalmas állandó együttható segítségével a fenti $(1/y - 1)$ nagyságú integrállal arányos. Jelölje csillag a továbbiakban a különböző változók hosszú távú egyensúlyi állapotát! A $\mu_m \equiv \mu_n (\gamma - 1)/(1 - y^*)$ választással épp (18)-hoz jutunk.[7]

$$\dot{A}/A = \mu_n (\gamma - 1) + \mu_m(Y_F/Y - 1) = \mu_m(1 - y^*) + \mu_m(y^*/y - 1) = \mu_m y^*(1/y - 1).$$

Az Y_F, *kibocsátási határtól mért távolság inverzével* történő (18) szabályozás[8] bevezetése után $Z \equiv x + q(y^*/y - 1)$, amelyre a parciális deriváltak:

$$\partial_K = - q\alpha y^* a/(yk) \qquad \text{és} \qquad \partial_A = x - q + q\alpha y^*/y.$$

Majd számítsuk ki γ_y idő szerinti deriváltját, azaz írjuk fel $\dot{\gamma}_y$ képletét, amely[9]:

$$d^2[\ln y]/dt^2 = \dot{\gamma}_y = \{(1 - \alpha)q(y - c)(y^*/y - 1) - [y - c + (1 - \alpha)q\, ky^*/y]\gamma_y + \alpha\, (y\, \gamma_y - c\, \gamma_c)\}/k. \quad (19)$$

Analízisből tudjuk, hogy az y pálya logaritmusának konkávitását a második derivált, azaz a $d^2[\ln y]/dt^2 = \dot{\gamma}_y$ előjele, inflexiós pontját pedig előjelváltása döntheti el. Ha tehát a kezdő, $t = 0$ időpontban az S alakú pálya definíciójában szereplő, a technológiavezetőhöz képesti (tehát csak relatív értelemben) csökkenő indulás:

$$\gamma_y(0) \equiv d[\ln y(0)]/dt < 0 \quad (20)$$

feltétele mellett további két igen természetesnek tűnő feltétel is teljesül:

$$y(0) > c(0) \qquad \text{és} \qquad \dot{y} = y\gamma_y \geq c\gamma_c = \dot{c}, \quad (21)$$

akkor az S alakú pálya definíciójában szereplő másik fontos

$$d^2[\ln y(0)]/dt^2 > 0 \quad (22)$$

feltétel – a (19) képlet miatt – automatikusan teljesül, azaz (20) és (21) $\Rightarrow$ (22). Emlékeztetünk, hogy a (20) és (22) egyenlőtlenség az S alakú pálya definíciójának két indulófeltételét jelenti. Így e két feltétel persze csak szükséges feltétele az S alakú pályának, de modellszámításaink szerint széles paramétertartományban mindez egyben elégséges feltételnek is bizonyul. A *4. ábrán* illusztrációként a módosított Aghion–Howitt-féle tényezőszabályozással (Japán/Egyesült Államok GDP/fő tényadataihoz) történő modellpálya-illesztés található, amely mint látható, S alakú.

A modell paraméterértékei a következők:

α	0,8415	θ	0,2520	ρ	0,1200	q	0,0186
δ	0,0800	y^*	0,9000	κ^*	4,0000	x	0,0186

[7] Fontosnak tartjuk megjegyezni, hogy az utóbbi származtatásnak további elméleti előnye az, hogy míg az Aghion–Howitt-féle tényezőszabályozás esetén mind a saját innovációból, mind pedig az imitációból eredő termelékenységnövekedés feltételezésére is szükség van; addig az utóbbinál a követőkről elég azt feltenni, hogy csak imitálnak/adaptálnak, ha a technológiai vezetőtől kellően távol és párhuzamosan van a hosszú távú egyensúlyi állapotuk. A tényadatok alapján mindez az Egyesült Államok mint technológiai vezetőhöz számítva a 70–90 százalék közötti szintre tehetők.

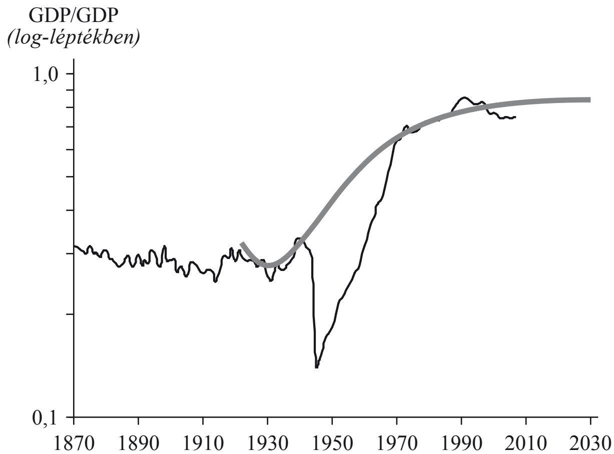
[8] Ahol $x \equiv \mu_n(\gamma - 1)$, a technológiavezető Egyesült Államok hosszú távú növekedési üteme (μ_n) az élenjáró innováció, $q \equiv \mu_m$ pedig az imitáció frekvenciája (lásd *Aghion–Howitt* [2006] 7–8. o. és a 4. lábjegyzet).

[9] A képlet levezetéséhez induljunk ki a (9) egyenletből, amely:

$\dot{k} = y - (\delta + x)k - c \Rightarrow \gamma_k = (y - c)/k - (\delta + x) \Rightarrow \alpha\dot{\gamma}_k = \alpha[y\gamma_y - c\, \gamma_c - (y - c)\gamma_k]/k$, és $\gamma_y = (1 - \alpha)\gamma_a + \alpha\gamma_k \Rightarrow \dot{\gamma}_y = (1 - \alpha)\dot{\gamma}_a + \alpha\dot{\gamma}_k$ és $\alpha\gamma_k = \gamma_y - (1 - \alpha)\gamma_a$,

$Z \equiv x + q(y^*/y - 1) = \dot{A}/A = x + \gamma_a \Rightarrow \dot{\gamma}_a = -q\gamma_y y^*/y \Rightarrow \dot{\gamma}_y = (1 - \alpha)\dot{\gamma}_a + \alpha\, \dot{\gamma}_k = -(1 - \alpha)\, q\, \gamma_y\, y^*/y + \alpha\, [y\, \gamma_y - c\, \gamma_c - (y - c)\gamma_k]/k \Rightarrow \dot{\gamma}_y = -(1 - \alpha)\, q\, \gamma_y\, y^*/y + \alpha\, (y\, \gamma_y - c\, \gamma_c)/k - (y - c)[\gamma_y - (1 - \alpha)\, q(y^*/y - 1)]/k \Rightarrow \dot{\gamma}_y = \{(1 - \alpha)\, q(y - c)(y^*/y - 1) - [y - c + (1 - \alpha)q\, k\, y^*/y]\gamma_y + \alpha\, (y\, \gamma_y - c\, \gamma_c)\}/k.$

4. ábra
S alak illesztése Japán/Egyesült Államok GDP/fő-tényadataihoz



*

1. Megmutattuk, hogy *Maddison* [2010] történelmi statisztikája segítségével – a második ipari forradalomtól (1870) napjainkig – a technológiai vezető (Egyesült Államok) egy főre jutó GDP-jének exponenciális trendjével normált (logaritmikus léptékű) koordinátarendszerben ábrázolva a követő OECD-országok egy főre számított GDP-adatai *S* alakú pályát írnak le.

2. Ugyanezen koordináta-rendszerre matematikai szabatossággal definiáltuk az *S* alakú pálya fogalmát.

3. Bizonyítottuk, hogy a Ramsey-féle optimalizálás az aggregált termelékenységi paraméter Aghion–Howitt-féle szabályozással párosítva nem képes az *S* alakú pálya modellezésére.

4. Az Aghion–Howitt-féle aggregált szabályozás elvén alapuló, de a szabályozásban a tőkét is számba vevő, kissé módosított Aghion–Howitt-féle szabályozás képes az *S* alakú tranzíciós dinamika előállítására.

Hivatkozások

AGHION, P.–HOWITT, P. [1992]: A Model of Growth through Creative Destruction. Econometrica, Vol. 60. 323–351. o.

AGHION, P.–HOWITT, P. [2006]: Appropriate Growth Policy: A Unifying Framework. Journal of the European Economic Association, Vol. 4. No. 2–3. 269–314. o.

ARK, B. VAN–CRAFTS, N. F. R. [1996]: Quantitative Aspects of Post-War European Economic Growth. Cambridge University Press, Cambridge, New York, Melbourne.

ARROW, K. J. [1979/1962]: A termeléssel szerzett tudás egyenlőtlensége a gazdasági elmélet számára. Megjelent: *Arrow, K. J.*: Döntés és szabályozás. Válogatott tanulmányok. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 299–321. o.

BARRO, R. J.–SALA-I-MARTIN, X. [1995]: Economic Growth. McGraw-Hill, New York.

BENHABIB, J.–SPIEGEL, M. [1994]: The Role of Human Capital in Economic Development: Evidence from Aggregate Cross-Country Data. Journal of Monetary Economics, 34. 143–173. o.

Benhabib, J.–Spiegel, M. [2005]: Human Capital and Technology Diffusion. Megjelent: *Aghion, P.–Durlauf, S. N.* (szerk.): Handbook of Economic Growth. Handbooks in Economics, 22. Elsevier, Amszterdam and San Diego: Elsevier, North-Holland, 1A, 935–966. o.

Conlisk, J. [1967]: A Modified Neo-Classical Growth Model with Endogenous Technical Change. Southern Economic Journal, Vol. 11. 421–432. o.

Csillik Péter–Tarján Tamás [2006]: Jánossy trendvonala S alakúvá válik-e a követő országok esetén? Gazdaság és Statisztika, 57. évf. 1. sz. 3–29. o.

Csillik Péter–Tarján Tamás [2007]: Is Convergence Rate Monotonic? Acta Oeconomica, 57(3): 247–261. o.

Csillik Péter–Tarján Tamás [2009]: Reconstruction Paths in Europe between 1945–1970, Planned and Market Economies Compared. Megjelent: *Bonoldi, A.–Leonardi, A.* (szerk.): Recovery and Development in the European Periphery. Bologna–Berlin, 29–42. o.

Csillik Péter–Tarján Tamás [2010]: Cross-Region Analysis Through a Myopic Leader-Follower Model. Acta Oeconomica, Vol. 60(2): 143–159. o.

Dumke, R. [1990]: Reassessing the Wirtschaftswunder: Reconstruction and Postwar Growth in West Germany in an International Context. Oxford Bulletin of Economics and Statistics, Vol. 52. No. 2. 451–491. o.

Jánossy Ferenc [1966]: A gazdasági fejlődés trendvonala és a helyreállítási periódusok. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.

Maddison, A. [2010]: Historical Statistics of the World Economy. Statistics on World Population, GDP and Per Capita GDP, 1-2008 AD http://www.ggdc.net/maddison/Historical_Statistics/vertical-file_02-2010.xls.

Meyer Dietmar [1995]: Az új növekedéselmélet. Közgazdasági Szemle, 4. sz. 387–398. o.

Nelson, R.–Phelps, E. [1966]: Investment in Humans, Technological Diffusion, and Economic Growth. American Economic Review, Papers and Proceedings, 61. 69–75. o.

Ramsey, F. P. [1928]: A Mathematical Theory of Saving. Economic Journal, Vol. 38. 543–559. o.

Rogers, E. M. [1962]: Diffusion of Innovations. Free Press, New York.

Romer, P. M. [1990]: Endogenous Technological Change. Journal of Political Economy, Vol. 98. No. 5. II. S71–S102. o.

Schumpeter, J. A. [1980/1934]: A gazdasági fejlődés elmélete. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.

Villanueva, D. [1994]: Openness, Human Development, and Fiscal Policies: Effects on Economic Growth and Speed of Adjustment. IMF Staff Papers, 41. 1–29. o.

Tarján Tamás [2000]: Jánossy elmélete az új növekedési elmélet tükrében. Közgazdasági Szemle, 5. sz. 457–472. o.

Tarján Tamás [2010]: Jánossy elmélete az új növekedéselmélet tükrében. Műhelytanulmányok, Új sorozat, MT–DP. 2010/2. MTA KTK, Budapest, http://econ.core.hu/file/download/mtdp/MTDP1002.pdf.