

KÓCZY Á. LÁSZLÓ

Központi felvételi rendszerek. Taktikázás és stabilitás

Egy központi felvételi rendszer feladata a jelentkezők és az iskolák vagy szakok párosítása. Ez a párosítás többféleképpen is történhet, de néhány alapelv mentén a gyakran igen különböző felvételi rendszerek is leírhatók. Ilyen alapelveként fogalmazható meg, hogy egy párosítás legyen stabil, Pareto-optimális, vagy hogy legyen mentes a taktikázástól. Jó és kevésbé jó párosító algoritmusokat is ismertetünk, áttekintjük alapvető tulajdonságaikat, illetve kitérünk olyan jellemzőkre, amelyek meghatározhatják egy felvételi rendszer elfogadottságát. A magyarországi felvételi rendszereket majd egy külön dolgozatban vizsgáljuk.*

Journal of Economics Literature (JEL) kód: C78, D61, D78, I20.

A legtöbb országban léteznek központi felvételi rendszerek a felsőfokú, közép-, sőt általános iskolai beiskolázásra, vagy például a orvosok rezidensi elhelyezésére. A mechanizmusok gyakran fekete dobozként működnek, nagyobb baj, hogy közülük sok rendelkezik két előnytelen tulajdonság valamelyikével. Az első a jogos irigység: a hallgatót felvették volna egy preferált iskolába, de nem oda került. A másik, hogy rosszul járhat az, aki a valódi preferenciáit adja meg; ügyesen kell taktikáznia ahhoz, hogy a legjobb iskolába kerüljön. Ez nem kis frusztrációt okoz mind a szülőknek, mind a jelentkezőknek.

Gale–Shapley [1962] cikke egy teljesen új terület alapjait fektette le. Matematikai modellje segítségével értékelhetjük a felvételi rendszereket; formalizálhatjuk a fent megfogalmazott tulajdonságokat, majd matematikailag igazolhatjuk az említett tulajdonságok meglétét vagy éppen hiányát. Az elmélet azt is bizonyítja, hogy tökéletes felvételi algoritmus nincs, azonban bizonyos speciális esetekben, amelyek a gyakorlati élet jó részét lefedik, léteznek olyan javaslatok, amelyek az ideálishoz nagyon hasonló eredményt produkálnak.

Felvételi rendszerben a párosítások elméletét elsőként az Egyesült Államokban alkalmazták a orvosok rezidensképzésénél. A rezidenspárosító program (*National Resident Matching Program, NRMP*)¹ évente több tízezer orvos elhelyezéséről gondoskodik. 1951-ben vezették be,² amikor a decentralizált piac válságba került: egyebek mellett rendszeres volt a szerződések megszegése egy vonzóbb ajánlat esetén és a különböző reformkísérletek csak újabb problémákat szültek. A hatás azonnali volt. A részvétel önkéntes, s ennek tükrében nagy jelentőségű, hogy a kezdetektől a hallgatók/intézmények bő 95

* A szerző köszöni *Bettina Klaus*, *Guillaume Haeringer* és *Kertesi Gábor* a tanulmány készítése során adott hasznos észrevételeit, tanácsait, egy névtelen bíráló részletes és konstruktív kritikáját, illetve az OTKA (NF-72610) és az Európai Bizottság (PERG-GA-2008-230879) támogatását.

¹ Korábban: National Intern Matching Program (NIMP).

² A történelmi áttekintést lásd *Roth* [1984]-ban.

százaléka részt vett a párosításban. Az 1980-as években ez az arány 85 százalékra mérséklődött elsősorban az orvosházaspárok miatt,³ akiknek össze kellett hangolniuk munkahelykeresésüket, ezért a rendszeren kívül kerestek mindkettőjük számára megfelelő megoldást, de később ez a probléma megoldódott (lásd a tanulmány második felében). Minek köszönhető az algoritmus sikere? A stabilitásnak és az őszinteségnek (bár, mint látni fogjuk, az utóbbi csak korlátozottan érvényesül).

Stabilitás. A decentralizált piac problémája, hogy a jelentkezők az ajánlatokat időben elszórva, de szoros határidőkkel kapják. Egy későn érkező jó ajánlat a megállapodás felrúgásához vagy a jogos irigységhez (*Abdulkadiroğlu–Sönmez* [2003]) vezethet: „mi lett volna, ha ... ?”

Fontos hangsúlyozni, hogy a jogos irigység nem a decentralizált rendszer hibája, előfordulhat központi felvételi rendszerek esetén is. Itt is létezhet olyan intézmény–hallgató páros, amely az eredményt látva, a különmegállapodás mellett dönt, tulajdonképpen ismét felrúgva a centralizált rendszer szabályait.

Őszinteség. Mielőtt egy hallgató benyújtja a jelentkezési lapját, rangsorolja a célintézményeket. Célszerű-e ebben a sorrendben megnevezni az intézményeket, vagy létezik ennél jobb taktika is? Általában az őszinteség nem kifizetődő.

Ez több problémát is felvet. Hova érdemes jelentkezni, hogy a hallgató a lehető legjobb kórházban/iskolában kapjon helyet? Helyes-e, ha az érdemek helyett a taktika a meghatározó? Hogy bonyolódik mindez, ha a hallgató nem ismeri a többiek érdemeit/rangsorait, sőt esetleg a saját érdemei (például az érettségi eredménye) sem ismertek?

Miután ismertettük a párosítások irodalmának hátterét és motivációját, rátérünk a matematikai modellek ismertetésére. Rögtön leszögezzük, hogy a matematika csak eszköz lesz, az eredmények nagyon is gyakorlatiak, világos, gyakran igen egyszerű válaszokat adnak világos kérdésekre. Mivel azonban a jelölés helyenként meglehetősen absztrakt az avatatlan olvasó számára, ezért az általánosabb modell helyett egy egyszerűbb bevezetésével és tárgyalásával kezdjük. Mint majd látni fogjuk, az egyszerű modell eredményei szinte kivétel nélkül általánosíthatók.

A házassági modell

Most már iskolákról és felvételizőkről beszélve, az egyszerűsítés annyi, hogy feltételezzük, hogy minden iskola pontosan egy hallgatót vehet fel. A nyilvánvaló párhuzam miatt ezt házassági modellnek nevezzük, ahol a férfiak a hallgatók, a nők az iskolák, vagy fordítva. Egy házaspár pontosan egy férfiből és egy nőből áll. Feltételezzük még, hogy egy férfi és egy nő pontosan akkor házasodik össze, ha ezt mindkét fél akarja. Konkrétan minden férfi, illetve nő maradhat nőtlen, illetve hajadon, ha valamilyen oknál fogva nem találnak elfogadható házastársat, vagy a szóba jövő jelöltek már mind elkeltek. Nem zárjuk ki a válás lehetőségét a modelltől, ugyanakkor stabil párosítások esetén válásra nincs szükség.

A matematikai modell alapjai

A párosítás résztvevői egyértelműen két csoportra oszthatók: A férfiak és nők diszjunkt, azaz átfedés nélküli halmazát (csoportját) M , illetve W jelöli, míg egy egyedet m , illetve w , számukat pedig rendre n , illetve p , tehát $M = \{m_1, m_2, \dots, m_n\}$, illetve $W = \{w_1, w_2, \dots, w_p\}$.

³ Korábban kevés orvos volt nő, így orvosházaspárok sem igen fordultak elő.

Feltételezzük azt is, hogy minden egyed rangsorolja az ellenkező nem képviselőit: ha az m férfi a w_1 nőt preferálja a w_2 nővel szemben, az azt jelenti, hogy a $\{w_1, w_2\}$ halmazból választva w_1 -t választaná, továbbá hogy a halmazt bármilyen elemekkel bővítve w_2 -t sosem választja. Ezt a preferenciarelációt $w_1 \succ_m w_2$ alakban is felírhatjuk.

Megengedjük azt is, hogy valaki nőtlen vagy hajadon, ma divatos szóval szingli maradjon. Ennek kifejezésére egy m férfi $P(m)$ preferenciáit a $W \cup \{m\}$ halmazon fogjuk értelmezni, azaz formailag, aki szingli, saját magával lép frigyre. Feltételezzük, hogy a relációk teljesen rendezettek, másrészt a preferenciareláció tranzitív, azaz ha $w_1 \succ_m w_2$ és $w_2 \succ_m w_3$, akkor $w_1 \succ_m w_3$. Az ilyen preferenciákat és gazdáikat racionálisnak nevezzük. A továbbiakban racionális preferenciákkal dolgozunk. Ezek felírhatók egyszerű felsorolással, például:

$$P(m) = w_1, w_2, m, w_3, \dots, w_p, \text{ avagy tömörebben } P(m) = w_1, w_2,$$

hiszen azok a hölgyek, akik körében szívesebben választja m úr a nőtlenséget, a további érvelést nem fogják befolyásolni.

Folytatva a jelölések bevezetését. Ha a fenti jelölést használjuk az egyes férfiak és hasonlóan a nők számára, akkor jelölje P a párosítás összes résztvevőjének a preferenciáit. Így

$$P = \{P(m_1), P(m_2), \dots, P(m_n), P(w_1), P(w_2), \dots, P(w_p)\}.$$

A társkeresők piacát az (M, W, P) hármassal jelöljük.

A társkeresők piacának eredménye a házasságok valamely halmaza, ahol továbbra is megengedjük a szingliket. Matematikailag:

1. definíció (párosítás). *Párosításnak az $M \cup W$ olyan μ önmagára való leképezését értjük, melyre $\mu[\mu(x)] = x$, és $\mu(m) = m$, vagy $\mu(m) \in W$, illetve $\mu(w) = w$, vagy $\mu(w) \in M$. $\mu(x)$ az x házastársát, vagy egyszerűen párját jelöli.*

Egy párosítást felírhatunk a párok halmazaként, például a

$$\mu = \begin{array}{ccc} w_1 & w_2 & (m_3) \\ m_2 & m_1 & m_3 \end{array}$$

párosításban m_1 házastársa w_2 , m_2 házastársa w_1 , m_3 pedig nőtlen. Beszélhetünk párosítások közötti preferenciákról is: pontosan akkor $\mu \succ_x \nu$, ha $\mu(x) \succ_x \nu(x)$, tehát nincs irigység vagy más externália.

Stabilitás

Miután bevezettük a jelölést és az alapfogalmakat, rátérünk az első fő kérdésre: a stabilitásra.

Egyéni racionalitás. A párosítás egyik alapfeltételezése az volt, hogy mindenki maradhat szingli. Tegyük fel, hogy a μ párosítás m -t w -vel házastítja és hogy $m \succ_m w$, azaz ha m a w -vel való házasság és a nőtlenség közül az utóbbit választja. Vegyük észre, hogy ahhoz, hogy m nőtlen maradjon, nincs szüksége senkinek a beleegyezésére. Azt is tudjuk, hogy a házasság a felek kölcsönös beleegyezése alapján jöhet csak létre. A fentiek alapján aligha remélhetjük, hogy m beleegyezik a w -vel való házasságba, hiszen azzal, ha nemet mond, automatikusan egy másik párosítás jön létre, ahol ő nőtlen marad, amit ő preferál. Tehát m blokkolja a μ párosítást.

Mivel nincsen semmilyen akadálya annak, hogy egy játékos hasonló módon blokkoljon egy párosítást, kizárólag olyan párosításokkal érdemes foglalkozni, amelyek mentesek az

ilyen típusú instabilitástól. A tulajdonságot a kooperatív játékelmélethez ismert hasonló koncepció után egyéni racionalitásnak nevezzük.

2. definíció (egyéni racionalitás). *Egy párosítás egyénileg racionális, ha minden egyén elfogadható a párja számára, azaz ha egyik egyed sem blokkolja.*

Bár az egyéni racionalitás jogos követelmény, azonban rögtön felmerül a kérdés, hogy létezik-e egyáltalán olyan párosítás, ami teljesíti ezt a feltételt. Fontos, hogy olyan párosító mechanizmust keressünk, amely minden társkereső piacra működik.

Jelen esetben a válasz pozitív, hiszen az a párosítás, amely minden egyedet önmagával párosít, definícióból adódóan egyénienként racionális. Nos, ez a párosítás – ha egyáltalán nevezhető annak – aligha az, amit kerestünk. Természetesen sok más egyénileg racionális párosítás is létezik, illetve létezhet. A továbbiakban egy hasonló, ám már a párokra vonatkozó stabilitási tulajdonságot fogunk vizsgálni.

Stabil párosítások. Ha valamely μ párosítás során létezik egy olyan m férfi és w nő, hogy $w >_m \mu(m)$ és $m >_w \mu(w)$, azaz m és w szívesebben házasodnának egymással, mint kijelölt partnereikkel, aligha kényszeríthetjük őket a társkereső által javasolt házasságokra. Fontos hangsúlyozni, hogy egy ilyen típusú blokkolás sokkal bonyolultabb, hiszen itt az egyoldalú szakítás önmagában értelmetlen, kell hozzá a kiszemelt partner hasonló lépése is. Ha azonban megengedjük a felek között a kommunikációt, feltételezhetjük, hogy azok a párosítások, ahol ilyen blokkoló párok előfordulhatnak, nem hosszú életűek.

3. definíció (stabil párosítás). *Egy párosítást akkor nevezünk stabilnak, ha sem egyének, sem párok nem blokkolják.*

Ha egy házasságközvetítő stabil párosítást javasol ügyfeleinek, akkor hiába elégedetlen az egyik érintett, a „jobb” partnerek nem fognak vele szóba állni. Fontos hangsúlyozni, hogy ha az érintettek kötelesek elfogadni a javaslatot, akkor a párosítás stabilitásának nincs igazán jelentősége (legfeljebb bánhatják, hogy nem máshogy alakult), viszont ha nem, akkor csak stabil párosításokat érdemes javasolni.

Tehát csak és kizárólag stabil párosításokkal érdemes foglalkozni. Létezik-e ilyen párosítás?

A késleltetett elfogadási algoritmus. A kérdés megválaszolásához mi sem egyszerűbb, mint mutatni egy stabil párosítást. Természetesen a kérdés tetszőleges számú férfi és nő, illetve tetszőleges preferenciaprofil [összegezve: tetszőleges (M, W, P)] esetén felmerül, tehát a konkrét megoldás helyett a megoldásra vezető algoritmust fogjuk leírni.

1. tétel (Gale–Shapley [1962]). *Minden társkereső piacnak van stabil párosítása.*

Bizonyítás. A stabil párosítás a következő algoritmussal határozható meg (Roth [2008] alapján).

0. lépés. Az esetlegesen előforduló közömbös preferenciákat önkényesen feloldjuk. (Például, ha az m közömbös a w_i és w_j nők között, akkor legyen $w_i >_m w_j$, vagy $w_j >_m w_i$, mindkét esetben stabil párosítást fogunk kapni.)

1.a lépés. Minden férfi megkéri az általa preferált nő kezét.

1.b lépés. Minden nő elutasítja a számára elfogadhatatlan ajánlatokat. Ha egy nő kezét egyenél több elfogadható férfi kérte meg, a legszimpatikusabbat egyelőre nem, a többit kikosarazza.

k.a lépés. Ha egy férfit a $k - 1$ -edik lépésben elutasítottak, megkéri a legszimpatikusabb olyan hölgy kezét, akinél még nem próbálkozott (és aki így eddig nem is kosarazta ki őt).

k.b lépés. A nők a legszimpatikusabb (elfogadható) kérő kivételével a többit kikosarazzák.

STOP Ha egy körben nincs új lánykérés, az aktuális párok összeházasodnak. Azok a nők, akik nem kaptak (elfogadható) házassági ajánlatot, illetve azok a férfiak, akik „kifogytak” az elfogadható hölgyismerősökből, szinglik maradnak.

Vegyük észre, hogy az algoritmus során egy férfi ugyanannak a nőnek csak egyszer kérheti meg a kezét. Ha ugyanis egyszer már elutasításra kerül, az algoritmus definíciója miatt annál a hölgnél többet nem próbálkozik. (Ez érthető, hiszen a preferenciák tranzitivitása miatt aligha remélheti, hogy egy újabb próbálkozással szerencsésebb lesz.) Mivel minden körben legalább egy férfi megkéri valamely nő kezét, és mivel a lehetséges lánykérések száma véges, ezért ennél nem is lehet több lánykérés az algoritmus futása alatt, tehát az algoritmus véget ér.

A stabilitás bizonyításához tegyük fel, hogy valamely m férfi szívesebben házasodna w -vel, mint az algoritmus által meghatározott $\mu(m)$ -mel, azaz $w >_m \mu(m)$. Ekkor w elfogadható m számára, és m az algoritmus során megkérte w kezét. Az tehát, hogy nem házasodtak össze, csak úgy lehetséges, hogy w talált egy másik m' férfit, amelyre $m' >_w m$. Ez a férfi vagy w későbbi házastársa, tehát $m' = \mu(w)$, vagy szintén elutasításra került, és így (a tranzitivitást felhasználva) $\mu(w) >_w m'$. Mindkét esetben igaz tehát, hogy $\mu(w) >_w m$, azaz m és w nem blokkolják a párosítást. Végül, mivel a férfiak csak elfogadható nők kezét kérik meg, a nők pedig az elfogadhatatlan férfiakat kikosarazzák, az egyéni racionalitás is teljesül. Ezt a procedúrát *késleltetett elfogadási algoritmusnak* nevezzük, hogy hangsúlyozzuk a tényt, hogy a nők nem kötelesek azonnal elfogadni a pillanatnyilag legjobb ajánlatot. A jobb érthetőség céljából tekintsük a következő példát (Roth–Sotomayor [1990] 29. o.):

1. példa (példa a késleltetett elfogadási algoritmusra). A következő (M, W, P) társkereső piacot vizsgáljuk:

$$P(m_1) = w_1, w_2, w_3, w_4$$

$$P(m_2) = w_4, w_2, w_3, w_1$$

$$P(m_3) = w_4, w_3, w_1, w_2$$

$$P(m_4) = w_1, w_4, w_3, w_2$$

$$P(m_5) = w_1, w_2, w_4$$

$$P(w_1) = m_2, m_3, m_1, m_4, m_5$$

$$P(w_2) = m_3, m_1, m_2, m_4, m_5$$

$$P(w_3) = m_5, m_4, m_1, m_2, m_3$$

$$P(w_4) = m_1, m_4, m_5, m_2, m_3$$

- Minden férfi számára van elfogadható nő.
- Az m_1, m_4, m_5 megkéri a w_1 , az m_2 és m_3 pedig a w_4 kezét.
- A w_1 a kérői közül m_1 -t, w_4 pedig az m_2 -t jegyzi el, az m_4, m_5 és m_3 elutasításra kerül. A dolgok jelenlegi állása szerint a párosítás a következőképpen alakul:

$$\begin{array}{cccc} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ m_1 & & & m_2 \end{array}$$

– A kikoszarozott férfiak újra választanak. Az m_3 , m_4 és m_5 rendre a w_3 , w_4 és w_2 kezét kéri meg.

– Mivel $m_4 >_{w_4} m_2$ ezért w_4 elutasítja korábbi jegyesét, és helyette m_4 -t jegyzi el. Most a párosítás így alakul:

$$\begin{array}{cccc} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ m_1 & m_5 & m_3 & m_4 \end{array}$$

– A kikoszarozott m_2 most w_2 kezét kéri meg és ezzel kiüti helyéről m_5 -öt. Így

$$\begin{array}{cccc} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \end{array}$$

– Most m_5 a harmadikként preferált w_4 -nél próbálkozik, aki kikoszarozza. Mivel minden számára elfogadható nő kikoszarozta, nőtlen marad, s ezzel kialakul a végleges párosítás:

$$\mu_M = \begin{array}{cccc} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & (m_5) \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & m_5 \end{array}$$

Ezt a párosítást μ_M -mel jelöljük, hangsúlyozva, hogy itt a férfiak voltak a kezdeményezők (leányvásár). Legényvásár esetén más párosítást kapunk, ami természetesen szintén stabil:

$$\mu_W = \begin{array}{cccc} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & (m_5) \\ m_2 & m_3 & m_4 & m_1 & m_5 \end{array}$$

Nem nyilvánvaló és talán némileg meglepő, hogy minden férfi az első, minden nő az utóbbi párosítást preferálja.

4. definíció. *Egy adott (M, W, P) házassági piacra a μ stabil párosítás M -optimális, ha minden férfi számára legalább olyan kedvező, mint bármely másik μ' stabil párosítás, azaz $\mu \geq_M \mu'$. Hasonló módon v W -optimális, ha minden nő számára legalább olyan kedvező, mint bármely másik v' stabil párosítás, azaz $v \geq_W v'$.*

Ez azt jelenti, hogy μ minden egyes férfi számára jobb (vagy nem rosszabb), mint bármely más stabil párosítás. Bár μ , illetve v nem a legjobb párosítás minden egyes férfi, illetve nő számára, mondhatjuk azt, hogy az elérhető legjobb.

Tekintve, hogy a párosítások során a férfiak, illetve a nők egymással versenyeznek a másik nem képviselőiért, azt gondolhatnánk, hogy olyan párosítás, ahol érdekeik mégis találkoznak, nem, vagy igen ritkán létezhet. Igen meglepő tehát, hogy ilyen párosítás pedig igenis létezik!

2. tétel (Gale–Shapley [1962]). *Minden (M, W, P) társkereső piacra létezik M -optimális és W -optimális párosítás is, és ezek pontosan a késleltetett elfogadási algoritmus által leányvásár, illetve legényvásár esetén meghatározott μ_M , illetve μ_W stabil párosítások.*

Knuth [1976] azt is igazolta, hogy μ_M a nők számára, μ_W pedig a férfiak számára a lehető legrosszabb stabil párosítás. Általánosan igaz, hogy ami a férfiaknak jobb, az a nőknek rosszabb, és fordítva.

Őszinteség és stratégiai kérdések

Az eddigiekben feltételeztük, hogy a társkereső piac résztvevői mindig pontosan a preferenciáik szerint cselekszenek. Például, tegyük fel, hogy a késlettetett elfogadási algoritmusban a férfiak bármely nőnek megkérhetik a kezét, a nők pedig bármelyik kérés ajánlatát elfogadhatják. Vajon ekkor mindig a preferenciáik szerint fognak cselekedni? Hasonlóan: ha a döntést egy házasságközvetítőre bízunk, vajon a résztvevők valódi preferenciáikat fogják megadni?

Ha bármelyik kérdésre „nem” a válasz, akkor adódhatnak olyan helyzetek, amikor valamely résztvevő kedvezőbb házastárral kerül párosításra, amennyiben a házasságközvetítőt félrevezeti preferenciáit illetően. Ezt *stratégiai viselkedésnek* vagy egyszerűen *taktikázásnak* nevezzük. A kérdésre nagyon könnyen megadhatjuk a választ, ehhez elegendő a következő példát megvizsgálni.

2. példa. Ahol az őszintétlenség jövedelmező.

Vegyük ismét a 1. példát! Mint emlékeztetes, az alábbi M -optimális párosítást kaptuk:

$$\mu_M = \begin{array}{ccccc} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & (m_5) \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & m_5 \end{array}$$

azaz a w_1 az m_1 -gyel lett összepárosítva, aki az ő harmadik választása.

Most vizsgáljunk egy módosított (M, W, P') piacot, ahol w_1 taktikai megfontolásból a $P'(w_1) = m_2, m_3, m_4, m_5, m_1$ preferenciát jelenti be, míg a többiek preferenciája változatlan! Emlékeztetőül eredetileg $P(w_1) = m_2, m_3, m_1, m_4, m_5$. Ekkor a következő párosítást kapjuk:

$$\mu'_M = \begin{array}{ccccc} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & (m_5) \\ m_3 & m_1 & m_2 & m_4 & m_5 \end{array}$$

Láthatjuk, hogy itt w_1 párja m_3 , ahol $m_3 >_{w_1} m_1$, tehát az őszintétlenség lehet kifizetődő.

Ez mindenképpen rossz hír, de szeretnénk tudni, hogy mennyire. Mik az őszintétlenség okai? Kik fognak taktikázni? Léteznek olyan piacok, ahol az őszinteség mindig kifizetődő? Végül felmerül az a kérdés is, hogy mindez miként egyeztethető össze a stabil párosítások elméletével. Ott ugyanis a résztvevők által megadott preferenciák szerint alakul ki egy stabil párosítás: ha ezeket rendszeresen valótlanul adják meg, semmit nem tudunk a stabilitásról az eredeti, valós preferenciák tükrében.

A kérdést egy általános stratégiai modell keretei között tudjuk megvizsgálni.

Stratégiai modell. Ismét egy (M, W, P) társkereső piacot vizsgálunk. Feltételezzük, hogy van egy házasságközvetítő, aki valamilyen algoritmus és a jelentkezők megadott preferenciái alapján készít egy párosítást. Feladjuk tehát az idealista elképzelést, hogy mindenki a valós preferenciáit fogja megadni, bár éppen arra törekszünk majd, hogy rábírnjuk az érintetteket az őszinteségre. A megadott preferenciák profilját Q -val jelöljük, és a közvetítő ezen preferenciák függvényében készíti el a $\mu = h(Q)$ párosítást.

Egy pillanatra úgy tűnhet, hogy kihagytunk egy lépést. Miért bízunk hirtelen a közvetítőre a párosítást? A két módszer között lényegi különbség nincs, hiszen most a piac résztvevői nem árulnak el többet, mint hogy az egyes helyzetekben hogyan cselekednének, míg e lépésük célja rejtve marad a közvetítő előtt.

Ez a megközelítés megfelel egy nem kooperatív játékelméleti modellnek. A házasságközvetítők a játékosok, stratégiáik a lehetséges preferenciaprofilok, amelyekből a köz-

vetítő létrehoz egy párosítást. Végül a hasznosságot a valós preferenciák alapján állapíthatjuk meg.

A legjobb válasz. A továbbiakban i -vel jelöljük a házassági piac valamely résztvevőjét. Mivel a Q tulajdonképpen a résztvevők stratégiai döntéseit összegzi, ezért az egyszerűség kedvéért a résztvevők stratégia profiljának nevezzük; i stratégiáját Q_i -vel, a többi játékos stratégiaprofilját pedig Q_{-i} -vel jelöljük, azaz $Q = (Q_i, Q_{-i})$. Ekkor $Q' = (Q'_i, Q_{-i})$ a Q profiltól csak i megadott preferenciáiban tér el, míg a többiek megadott preferenciái változatlanok.

Ekkor a többiek adott Q_{-i} stratégiájára adott Q'_i stratégiát *legjobb válasznak* nevezzük, ha bármilyen Q_i -t választva

$$h(Q'_i, Q_{-i}) \geq h(Q_i, Q_{-i}).$$

A legjobb válasz nem feltétlenül egyértelmű, azaz lehet több legjobb válasz is, ezek természetesen ugyanazt a párt eredményezik i -nek.

Ha valamely Q'_i minden Q_{-i} -re legjobb válasz, akkor *domináns stratégiának* nevezzük.

Lehetetlenségi tétel. Most rátérünk a közvetítő által használt algoritmus vizsgálatára. Tulajdonképpen csak az algoritmus bemenete és eredménye érdekes, részletei érdektelenek. Így szerencsésebb az algoritmus helyett a párosító mechanizmus elnevezés, formailag egy h függvényről van szó, ami egy tetszőleges (M, W, P) piachoz egy $h(Q)$ párosítást rendel.

Egy μ párosítás Pareto-optimális, ha bármely más $\mu' \neq \mu$ párosításhoz létezik olyan i egyed, hogy $\mu' <_i \mu$. Egy párosító mechanizmus Pareto-optimális, ha minden piachoz Pareto-optimális párosítást rendel.

Egy párosító mechanizmus stratégiabiztos (vagy taktikamentes), ha a mechanizmus jelenlétében az egyedek valós preferenciáikat adják meg, azaz ha a mechanizmus eredményét, a párosítást nem befolyásolja az a tény, hogy megengedjük a taktikázást. Mivel ekkor a résztvevők felfedik valós preferenciáikat, az ilyen mechanizmusokat felfedési mechanizmusoknak is nevezzük.

A kérdés az, hogy a most bevezetett tulajdonságok mennyiben összeegyeztethetők egymással, illetve a stabilitással. Roth [1982] ezen kapcsolatokat vizsgálta és bár vannak jó hírek is, fő konklúziója negatív.

– Nincs olyan párosító mechanizmus, mely stratégiabiztos és stabil párosítást eredményez.

– Léteznek ugyanakkor olyan mechanizmusok, amelyek stabil párosítást eredményeznek, és a férfiak vagy a nők felfedik valós preferenciáikat.

– Léteznek továbbá stratégiabiztos, Pareto-optimális mechanizmusok.

3. példa (stratégiabiztos Pareto-optimális mechanizmus). Állítsuk sorba a férfiakat: m_1, m_2, \dots ! Vizsgáljuk a következő mechanizmust: m_1 számára legkedvesebb hölgyet választja. m_2 a maradékból választhat, ... és így tovább: m_k csak azokat a hölgyeket választhatja, akiket m_1, \dots, m_{k-1} még nem választott, viszont a maradékból kiválaszthatja a számára legvonzóbbat. A párosítás ezek után értelemszerű. Világos, hogy a férfiaknak érdekében áll preferenciájuk felfedése. Ugyanakkor a nők preferenciája nem befolyásolja a végeredményt, tehát fel nem fedése sem, azaz a nőknek sem áll érdekükben stratégiai megfontolásokhoz nyúlni. A Pareto-optimalitás pedig garantált, hiszen minden férfi a számára legkedvesebb nőt választotta a megmaradt hölgyek közül: bármely más párosítással valamelyikük rosszabbul jár.

Az amerikai NFL profi futball-liga ilyen mechanizmus szerint veszi fel a végzett egyetemista játékosokat. Itt a csapatok sorrendjét az előző szezonban elért eredményük határozza meg, lényegében fordított erőssorrendben választanak. Hasonló módon az Egyesült Államok Tengerészeti Akadémiájának végzős kadéttjai tanulmányi eredményeik szerinti rangsorban választhatnak a betöltendő pozíciók közül.⁴

A véletlen sorozatos diktatúra ennek módosított változata (*Abdulkadiroğlu–Sönmez* [1998], [1999]), ahol a hallgatók véletlen sorrend szerint választhatják az általuk legjobbnak ítélt, még elérhető iskolát.

Sajnos a következő tétel, amelyet bizonyítás nélkül közlünk, igazolja, hogy az őszinteség és a stabilitás – általában – nem összeegyeztethetők.

3. tétel (lehetetlenségi tétel) (Roth [1982]). *Nincs olyan stabil párosító mechanizmus, amelyben a valós preferenciák felfedése minden játékos számára domináns stratégia.*

A tétel azt jelenti, hogy nincs olyan mechanizmus, amelyre bármely valós preferenciaprofil esetén teljesül a két tulajdonság. A tételt *Alcalde–Barbera* [1994] tovább erősítette (4. tétel).

4. tétel (Alcalde–Barbera [1994]). *Nincs olyan Pareto-optimális és egyénileg racionális párosító mechanizmus, amelyben a valós preferenciák felfedése domináns stratégia.*

Mivel sok olyan alkalmazás létezik, ahol csak az egyik oldal stratégiai, érdekes azokat az eseteket is vizsgálni, ahol csak az egyik oldal stratégiai viselkedése kérdéses. Az 5. tételt is bizonyítás nélkül közöljük.

5. tétel (Dubins–Freedman [1981]). *Az M -optimális stabil párosítást eredményező mechanizmusban a férfiak számára domináns stratégia a valódi preferenciáik felfedése.*

A tétel nem mond semmit a nők viselkedéséről az M -optimális stabil párosítással kapcsolatban. Mivel az ő érdekeik ebben az esetben épp ellenkezők, joggal feltételezzük, hogy az M -optimális stabil párosítás alkalmazása és több stabil párosítás esetén lesz olyan nő, aki jól jár azzal, ha valótlannul adja meg preferenciáit (*Gale–Sotomayor* [1985]).

A tárgyalást végül egy meglehetősen általános tétellel zárjuk, amely kimondja, hogy bár egyes csoportok manipulálhatják preferenciáikat, ez sohasem lesz a csoport minden tagja számára domináns stratégia.

6. tétel (a sikeres manipuláció korlátairól) (Demange és szerzőtársai [1987]). *Ha P jelöli a valódi preferenciákat és \bar{P} -ben csak a résztvevők valamely S részhalmazának preferenciái térnek el, akkor nincs olyan \bar{P} szerint stabil párosítás, amit az S koalíció minden tagja preferál minden P szerint stabil párosítással szemben.*

Ezek és még sok más kevésbé izgalmas tétel jelzi, hogy a stratégiai viselkedésnek szerepe van, de nem akkora. Felmerül a kérdés, hogy ha minden résztvevő él a preferenciák stratégiai manipulálásával, akkor mindez hova vezet, kialakul-e egy egyensúly, amiből azután meghatározhatjuk az egyensúlyi párosítást. Az ilyen típusú egyensúly meghatározásához visszatérünk a probléma normális alakjához, és a legjobb válasz alfejezet elején bevezetett fogalmához.

5. definíció. *A Q stratégiai preferenciaprofil egyensúlyt alkot, ha minden Q_i legjobb válasz a többiek adott Q_{-i} stratégiáira.*

⁴ Roth–Sotomayor [1990] idézi a New York Times 1986. január 30.-i számát.

Ezt az egyensúlyt a játékelméletben Nash-egyensúlynak is nevezzük (Nash [1950], [1951]). A fogalmat felhasználva, Roth [1982] tételét úgy is megfogalmazhatjuk, hogy nincs olyan stabil párosítási mechanizmus, amelyre mindig egyensúlyi a preferenciák felfedése. Egyensúlyi profil esetén senki sem jár jól egy egyoldalú módosítással, így az egyensúly önmege erősítő. A $\mu(i)$ megnevezése mint egyetlen elfogadható pár minden egyes i résztvevő számára egy triviális Nash-egyensúlyt alkot, tehát az egyensúlyi párosítás létezése garantált. Ez azonban nem zárja ki más, esetleg stabil egyensúlyi párosítások létezését.

A továbbiakban elköszönünk a házassági piactól, és rátérünk a *sok az egyhez* párosítások vizsgálatára.

Sok az egyhez párosítások – felvételi modellek

A bevezetőben tárgyalt rezidensi felvételi – vagy hasonlóan a magyar felsőoktatási felvételi rendszer – szintén párosítási probléma. Itt a párosítandók az iskolák (tulajdonképpen a szakok) és a jelentkezők. A korábbiakhoz hasonlóan a jelentkezők rangsorolni tudják az iskolákat/kórházakat, míg az utóbbiak is rendelkeznek a hallgatók valamilyen rangsorával.

Vannak ugyanakkor fontos különbségek is. Míg a házassági modellben minden férfi és nő pontosan egy személlyel alkot párt, addig a felvételi során egy-egy iskola több hallgatót is felvehet. A párosítás eredménye egy diák számára a felvételt jelenti valamely intézménybe, vagy a magával való párosítást, azaz semelyik elfogadható helyre nem vették fel. Egy intézmény a szabad helyek közül tetszőleges számút feltölthet; az üresen maradt helyekre az iskolát önmagával párosítjuk.

A modell alkalmazható más párosítási problémákra is, mint például álláskeresők és cégek közti közvetítésben, de az egyszerűség kedvéért a továbbiakban hallgatókról és iskolákról fogunk beszélni.

Matematikai modell

A párosítás résztvevői az iskolák $C = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ és a hallgatók $S = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$. A hallgatók az iskolákat, az iskolák pedig a hallgatókat rangsorolják. Feltételezzük, hogy minden preferencia teljes és tranzitív. A korábbiakhoz hasonlóan itt is egyszerű felsorolással írjuk le a preferenciákat, és elhagyjuk az elfogadhatatlan párosításokat. Így például $P(C_1) = s_1, s_2$, illetve $P(s_2) = C_3, C_1, C_2$. Konkrét összehasonlításban $C_i >_s C_j$, ha az s hallgató preferálja a C_i iskolát a C_j -vel szemben. Az s_i hallgató elfogadható a C iskola számára, ha $s_i \geq_C C$ [ahol megengedtük az egyenlőséget, azaz a közömbösséget (indifferenciát) is].

Első lényegi különbségként feltételezzük, hogy egy C iskola q^C hallgatót vehet fel. A q^C -t az iskola kvótájának nevezzük.

A következő definícióhoz, amely nem más, mint a fentiek matematikai megfogalmazása, szükségünk van egy új fogalomra. Egy adott X halmaz elemeinek rendezetlen családján X elemeinek egy gyűjteményét értjük, ahol megengedjük az ismétlődést is.

6. definíció (párosítás). *A μ párosítás egy olyan függvény, amely a $C \cup S$ halmaz elemeihez a $C \cup S$ halmaz rendezetlen családjait rendeli, mégpedig úgy, hogy*

1. $|\mu(s)| = 1$ és $\mu(s) = s$, vagy $\mu(s) \in C$, azaz minden hallgatót pontosan egy iskolához vagy önmagához rendeli.

2. $|\mu(C)| = q^C$, azaz minden iskolához egy olyan családot rendelünk, melynek kardinalitása pontosan az iskola kvótájával egyezik. Megkötés továbbá, hogy ha a családnak r eleme hallgató ($|\mu(C) \cap S| = r$), akkor a maradék $q^C - r$ helyet önmagával, C -vel tölti fel.

3. Akkor és csak akkor $\mu(s) = C$, ha s a $\mu(C)$ családba tartozik, azaz a párosítás kölcsönös.

A párosításokat a korábbiakhoz hasonlóan ábrázoljuk, tehát

$$m_1 = \begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & (s_3) \\ s_1, s_2, C_1, C_1 & s_4 & s_3 \end{array}$$

azt jelenti, hogy $q^{C_1} = 4$, ebből két helyet töltött fel hallgatókkal, C_2 csak egy hellyel rendelkezett, amit sikeresen fel is töltött, míg s_3 felvételije sikertelen volt.

Preferenciák

A házassági modellben a párosítások közti preferenciák kérdésén hamar tújutottunk: minden résztvevő a hozzárendelt párja alapján rangsorolta a párosításokat. Tehát ha $\mu_1(x) >_x \mu_2(x)$, akkor (és csak akkor) $\mu_1 >_x \mu_2$. Ez a gondolatmenet a hallgatókra tökéletesen illik itt is, azonban az iskolákat itt nem hallgatókkal, hanem hallgatók csoportjaival párosítjuk, így mindenekelelt azt kell tisztázni, hogy az iskolák hogyan rangsorolják ezeket a hallgatói csoportokat.

A C iskola csoportokra vonatkozó preferenciáit $P^\#(C)$ -vel jelöljük. Elvben $P^\#(C)$ bármi lehet, ugyanakkor joggal feltételezhetjük, hogy a preferenciák fogékonyak: ha a hallgatók egy adott halmazában valamely hallgatót egy, az iskola által felállított hallgatói rangsorban előrébb szereplő hallgatóra cserélünk, a többit pedig változatlanul hagyjuk, akkor az iskola a kapott halmazt preferálja. Általánosan:

7. definíció. *A hallgatók részhalmazain értelmezett $P^\#(C)$ reláció fogékony [az egyéni hallgatókra definiált $P(C)$ preferenciákra], ha*

$$\mu(C) \cup \{s'\} \setminus \{s\} >_C \mu(C) \Leftrightarrow s' >_C s,$$

ahol, értelemszerűen az első preferenciareláció $P^\#(C)$ -re, az utóbbi $P(C)$ -re vonatkozik.

A fogékonyság nem minden helyzetben állja meg a helyét. Így, bár felvételi modellnek nevezhető a cégek és álláskeresők piaca, az egyes felvehető alkalmazottak esetlegesen komplementer képességei miatt ezekben a modellekben a preferenciák nem lesznek fogékonyak. Az ilyen piacok részletes tárgyalása meghaladja e dolgozat kereteit, további részletekért lásd *Kelso–Crawford* [1982].

Bár a fogékonyság némileg korlátok közé szorítja a $P^\#(C)$ reláció lehetséges változatait, nem határozza meg például az iskola rangsorában első és negyedik, illetve második és harmadik helyen levő hallgatók által alkotott halmazok rangsorát. Fordítva viszont egyértelmű a kapcsolat: $P^\#(C)$ egyértelműen meghatározza a $P(C)$ preferenciarelációt [hiszen $P^\#(C)$ -t definiáljuk az egy hallgatóból álló csoportokra is].

Stabilitás

Akár a házassági modellben, itt is feltételezzük, hogy a felvételhez a felek kölcsönös belegegyezése szükséges, így nem számíthatunk olyan párosításokra, ahol $\mu(s) = C$, és vagy a hallgató elfogadhatatlan az iskola, vagy az iskola a hallgató számára. Ellenkező esetben az érintett résztvevő blokkolhatja a párosítást. Az ilyen blokkoló hallgatóktól és iskoláktól mentes párosításokat egyénileg racionálisnak nevezzük.

Hasonlóan, a C iskola és az s hallgató blokkolhatja az adott μ párosítást, ha $\mu(s) \neq C$, és mindkettő preferálja a másikat (az egyik) jelenlegi párjával szemben, azaz $C >_s \mu(s)$ és $s >_C \sigma$, ahol $\sigma \in \mu(C)$ lehet hallgató, vagy maga C , azaz egy üres hely.

8. definíció (stabil párosítás). *Egy párosítás stabil, ha egyénileg racionális, és semelyik hallgató–iskola páros nem blokkolja.*

Elvileg ez a fajta stabilitás a történetnek csak része, de hamarosan igazoljuk, hogy a több hallgatóból és esetleg több iskolából álló blokkoló koalíciókra is kiterjesztett stabilitás egybeesik a 8. definícióbeli stabilitással.

Azt mondjuk tehát, hogy egy μ párosítás csoportosan instabil, avagy egy koalíció blokkolja, ha létezik egy A koalíció és egy μ' párosítás, hogy minden egyes $s \in A$ hallgatóra és minden egyes $C \in A$ iskolára

– $\mu'(s) \in A$, tehát az érintett hallgatók az érintett iskolák valamelyikével lesznek összepárosítva,

– $\mu'(s) >_s \mu(s)$, tehát az új párosítást preferálják,

– ha $\sigma \in \mu'(C)$, akkor $\sigma \in A \cup \mu(C)$, tehát C új hallgatókat csak A -ból meríthet,

– $\mu'(s) >_C \mu(C)$, tehát az érintett iskolák is az új párosítást preferálják.

Összegezve: Minden, a változásban érintett hallgató és iskola az új párosítást preferálja.

9. definíció. *Egy párosítás csoportosan stabil, ha nem blokkolja semmilyen koalíció.*

7. tétel. *Egy párosítás pontosan akkor stabil, ha csoportosan stabil.*

Mivel egy hallgató–iskola páros is koalíció, ha egy párosítást egy ilyen pár blokkol (azaz ha nem stabil), akkor csoportosan is instabil. Azaz, ha csoportosan stabil, abból következik, hogy stabil.

A másik irányhoz a fogékonyságot használjuk. Ha ugyanis egy párosítást blokkol egy koalíció, akkor létezik olyan blokkoló hallgató–iskola pár, amely mindkét tagja jól jár (ha nincs hallgató a blokkoló koalícióban, akkor egy még egyszerűbb esettel van dolgunk, amit az olvasóra bízunk), méghozzá az iskola egy rosszabb hallgatót cserél le.⁵ Ekkor viszont ez a páros a koalíciótól függetlenül is blokkolná a kiindulási párosítást, tehát az nem stabil.

Kapcsolat a házassági modellel

A 7. tétel jelentősége messze túlmutat a tényen, hogy továbbra is a jól ismert stabilitás-fogalmat használhatjuk, azaz hogy elegendő a kis koalíciókat figyelemmel kísérnünk. A tételből következik, hogy elegendő a résztvevők egyénekre vonatkozó P preferenciáival foglalkozni! Tehát el is felejthetjük a csoportokra vonatkozó preferenciák körüli problémákat. Mindez azt sugallja, hogy a felvételi és a házassági modell között a kapcsolat sokkal szorosabb, mint gondoltuk, s ez azt a reményt ébresztheti bennünk, hogy az ott kapott eredmények könnyen általánosíthatók a felvételi modellre.

Hogy ezt megvizsgáljuk, a (C, S, P) felvételi piacot házassági piaccá alakítjuk. Ehhez elsőként az egyes iskolák által kínált helyeket külön-külön résztvevőként fogjuk vizsgálni, azaz tulajdonképpen a C iskolát q^C darabra bontjuk: c_1, c_2, \dots, c_{q^C} , amelyek átveszik C preferenciáit. Ugyanígy, a hallgatók is egyformán vélekednek a c_1, \dots, c_{q^C} helyekről, tehát az egyszerűség kedvéért a hallgatók által az iskolákról felállított rangsorban C helyére

⁵ A blokkoló koalícióba beleférnek olyan hallgatók is, akikkel külön nem járna jól az iskola, ezért kell itt óvatosságnak lenni.

beillesztjük a c_1, \dots, c_{q^c} sorozatot. Tehát, ha $C >_s C'$, akkor s a C minden egyes pozícióját preferálja C' minden egyes pozíciójához képest. Az így kialakított piac egy az egyben megfelel a házassági piacnak.

8. tétel. *A felvételi problémában pontosan akkor stabil egy párosítás, ha a megfelelő házassági piaci párosítás is stabil.*

Eme tételen keresztül sok korábbi eredmény, például a stabil párosítások létezésére vonatkozók, átvezethetők a felvételi problémára. Sajnos, ez igaz a negatív eredményekre is. Mivel a házassági modell a felvételi modell speciális esete (ahol minden iskola legfeljebb 1 hallgatót vehet fel) itt is igaz a 3. (lehetetlenségi) tétel, azaz nincs olyan stabil párosító mechanizmus, ahol az őszinteség domináns stratégia lenne.

Ugyanakkor több olyan tételt is megfogalmaztunk optimalitás tekintetében, ahol az eredmény egy kicsit más lesz, ha figyelembe vesszük azt is, hogy az egyes helyek valójában együtt alkotnak egy résztvevőt, aki mindig egy ilyen, ha úgy tetszik, koalíciót alkotva hozza meg döntéseit.

A Gale–Shapley-algoritmus és tulajdonságai

A továbbiakban bizonyítás nélkül soroljuk fel a főbb tételeket. Mindenekelőtt az Egyesült Államok országos rezidenspárosító programjának (NRMP) algoritmusát övező siker nyitját próbáljuk felfedni.

9. tétel (Roth [1984]). *Az NRMP algoritmus (lásd Függelék) stabil párosító mechanizmus.*

Ez a tétel megmagyarázza, hogy miért volt olyan sikeres a központosított felvételi: a javasolt párosítás stabil, tehát nincs olyan medikus–kórház páros, amelyen javítani tud. Így mindenki elégedett lehetett a kapott párosítással.

10. tétel (Roth [1984]). *Az NRMP algoritmus bármely megadott preferenciaprofil esetén a kórházak számára optimális stabil párosítást eredményez, azaz az NRMP algoritmus bármely megadott preferenciaprofil esetén a H_i kórházat az elérhető legnagyobb számú és ezen belül az elérhető, általa legelőrébb rangsorolt hallgatóval párosítja.*

Ez a tétel egyszerre igazolja, hogy létezik a kórházak számára optimális stabil párosítás, illetve hogy az NRMP algoritmus pontosan ezt állítja elő. Mielőtt ebből túl messzire menő következtetéseket vonnánk le, tekintsük a 11. tételt.

11. tétel (Roth [1985]). *A hallgatók számára optimális stabil párosítás gyengén Pareto-optimális, viszont a kórházak számára optimális stabil párosítás nem feltétlenül az.*

A tétel első fele a házassági modellekre kapott eredményekből következik, míg a második részre Roth [1985] mutat egy példát, ahol a Pareto-optimalitás sérül.

Végül néhány eredmény (NRMP) ellen megfogalmazott kritikákkal kapcsolatban.

Az első ilyen nem pusztán kritika, világosan megfigyelhető tény ugyanis, hogy ahogy nő a végzős orvosok között az orvos–orvos házaspárok száma, csökken az NRMP-ben való részvétel aránya. Világos, hogy az NRMP a házaspárokat nehezen kezeli, de vajon létezik-e jobb megoldás. A házaspárok számára ugyanis nemcsak az egyén, hanem házassági

társa részére felajánlott hely is számít. Hiába kapja meg a feleség álmai állását A városban, ha a férj A -ban nem, csak B -ben kap állást. Ha ez azért van, mert A kórháza nevesebb, akkor az ide felvett feleségnek lehet esélye B -ben, és ezzel egy egyéni szempontból preferált párosítást ad fel.

12. tétel (Roth [1984]). *Ha a házaspárokat is figyelembe vesszük a felvételi modellben, nem mindig létezik stabil párosítás.*

Ezt a kérdést az 1990-es években az NRMP átalakításakor (Roth–Peranson [1999]) azal sikerült rendezni, hogy a házastársak közös preferencialistát állíthattak fel, ahol pozíciópárokat rangsoroltak (Roth [2008]).

Az NRMP-vel kapcsolatos másik kritika a vidéki kórházakból érkezett. A tapasztalat azt mutatta, hogy ezek a kórházak nehezebben töltötték fel állásaikat, és a felvettek közt sokan voltak a külföldi egyetemeken végzett orvosok. Felmerült a kérdés, hogy ez vajon miként befolyásolja a vidék orvosi ellátásának színvonalát, illetve hogy lehetséges volna-e az NRMP módosításával ezen a tendencián javítani. Ez elsöre jó ötletnek hangzik, hiszen a párosításban részt vevő orvosok jó része követi a mechanizmus ajánlását, tehát ha a mechanizmust lehetne úgy módosítani, hogy több/jobb orvos kerüljön vidékre, ezzel megoldódna a probléma. Ugyanakkor a lehetőségeknek vannak bizonyos korlátai. A mechanizmusban való magas fokú önkéntes részvétel annak köszönhető, hogy az eredményezett párosítás stabil. Ez tehát nem lehet alku tárgya. Ekkor viszont a következő tételek azt mutatják, hogy a mechanizmus módosításával nem érhető el a kitűzött cél.

A 13. tétel a betöltetlen állásokkal foglalkozik.

13. tétel (Roth [1984]). *A felvett hallgatók és a betöltött férőhelyek minden stabil párosítás esetén ugyanazok.*

A másik igény a felvett orvosok minőségével kapcsolatos. Ha már nem lehet minden férőhelyet betölteni, legalább kapjanak ezek a kórházak jobb rezidenseket.

14. tétel (Roth [1986]). *A kórházhoz, amely valamely stabil párosítás esetén nem tudja minden üresedését feltölteni, minden stabil párosítás pontosan ugyanezeket a orvosokat rendeli hozzá.*

Végül a stratégiai kérdésekre térünk rá.

15. tétel (Roth [1985]). *Nincs olyan stabil párosítás, amelyben minden kórház számára domináns stratégia a valós preferenciáik felfedése.*

Ez azonban, úgy tűnik, amiatt van, hogy az iskolák/kórházak a házassági modellben inkább koalícióként viselkednek. A hallgatók leképezése sokkal természetesebb, így nem meglepő, hogy rájuk alkalmazható az 5. tétel.

16. tétel (Roth [1986]). *A hallgatók szempontjából optimális stabil párosítás esetén a hallgatók számára domináns stratégia preferenciáik felfedése.*

Az utóbbi eredménynek komoly szerepe volt abban, hogy a 90-es évek elején az NRMP áttért a hallgatók szempontjából optimális párosításra (leányvásár helyett lényvásár). Ha feltételezzük, hogy az iskolák, kórházak nem viselkednek stratégiai

félként, azaz nem taktikáznak, ez az algoritmus akár őszinte preferenciafelfedést is eredményezhet.

17. tétel (Roth [1986]). *Vegyünk egy tetszőleges stabil mechanizmust! Ekkor bármely, a valós preferenciák szerint egyénileg racionális párosításhoz létezik egy egyensúlyi deklarált (tehát nem valós) preferenciaprofil, ami ezt a párosítást eredményezi.*

A késleltetett elfogadási algoritmus további tulajdonságait Roth [2008] foglalja össze.

A késleltetett elfogadási algoritmus alkalmazásai

Az Egyesült Államok rezidensképzésén túl több más párosítási probléma megoldására is használják a Gale–Shapley-algoritmust vagy egy, azzal ekvivalens mechanizmust. A teljesség igénye nélkül: Spanyolországban a felsőoktatási felvételi alapja ez az algoritmus, bár az őszinteséget csorbítja, hogy a jelentkezők csak korlátozott mértékben fedhetik fel preferenciáikat (Romero-Medina [1998]). Magyarországon a középiskolai felvételinek egy az egyben a (jelentkezők szempontjából optimális) késleltetett elfogadási algoritmus, a felsőoktatásnak pedig az ezzel lényegében ekvivalens ponthúzó algoritmus az alapja (Bíró [2008]), de Roth [2008] az alkalmazások egész sorát hozza Kanadából és az Egyesült Államokból.

További párosítási algoritmusok

Az eddigiekben, eltekintve a bevezető, motiváló példától, amely aztán végigkísérte az egész dolgozatot, eddig elsősorban az elméleti kérdésekkel foglalkoztunk. A továbbiakban rátérünk a párosítások, elsősorban a felvételi modell alkalmazásainak tárgyalására.

Rezidensképzés az Egyesült Királyságban. Prioritásalapú párosítás

Amikor az 1960-as évek közepén az Egyesült Királyságban az amerikaihoz hasonló problémák jelentkeztek, megoldást itt is a (regionálisan) központosított párosítási mechanizmusokban látták, amelyeket aztán többé-kevésbé az amerikai minta alapján, a helyi, regionális sajátosságokat figyelembe véve vezettek be (lásd Roth [1991]-et, Kagel–Roth [2000]-t és a bennük szereplő további hivatkozásokat). E mechanizmusok nagy része nem adott stabil párosításokat, és így nem meglepő, hogy az (önkéntes) részvétel elmaradt a kívánatostól, és így – érdeklődés hiányában – ezek a mechanizmusok fokozatosan eltűntek. Az is tanulságos, hogy mindössze kettő volt stabil mechanizmus (Cardiffban és Edinburghban), ezek igen sikereseknek bizonyultak, és a mai napig alkalmazzák őket. Azóta több más régióban is bevezettek stabil mechanizmusokat, a Skóciában alkalmazott Scottish Foundation Allocation Scheme-t Irving–Manlove [2009] dokumentálja.

Mi egy instabil mechanizmust vizsgálunk, amelyeket Newcastle-ban és Birminghamban vezettek be még az 1960-as években. Itt a hallgatók és a leendő konzulensek rangsorolták egymást, és a párok összesített rangja (pontosabban a rangok szorzata) alapján alakult ki egy sorrend, majd e szerint a sorrend szerint kerültek a hallgatók elhelyezésre. Így elsőként az (1, 1)-párok (ahol az első szám a hallgatónak a kórház rangsorában, a második pedig a kórháznak a hallgató preferenciái szerint elfoglalt helyét jelzi), majd 2-es szorzattal

rendelkező (1, 2) illetve (2, 1) párok és így tovább kerültek párosításra. A különbség csak a döntetlenek elbírálásában volt, azaz hogy (1, 2) vagy (2, 1) kerül előbb sorra.

A newcastle-i tapasztalat szerint egyre fontosabb lett a hallgatók és konzulensük között a közvetlen kapcsolat, a rendszer feladása előtt a résztvevők döntő része csak a már megkötött egyezség rögzítésére használta, azaz csak az elsőrangú preferenciák jelzésére, ami természetesen hátrányos helyzetbe hozta azokat, akik a rendszert annak eredeti rendeltetése szerint használták.

Hasonló algoritmust használnak a német egyetemi felvételi rendszerben (*Braun és szerzőtársai* [2007]).

Sorozatos diktatúra

Abdulkadiroğlu–Sönmez [2003] rávilágított arra, hogy sok egyesült államokbeli iskolában tisztázatlan a felvételi rendje, a döntések gyakran önkényesek, és legritkább esetben felelnek meg a tudományban már évtizedek óta ismert alapvető elvárásoknak. Itt ezek közül az eredmények közül tekintünk át néhányat.

A már korábban említett (véletlen) sorozatos diktatúra alkalmazásakor a hallgatókat (véletlen, azaz sorsolással kialakított) sorba rendezik, és a soron következő hallgató mintegy diktátorként választhat a megmaradt opciók közül. Akár a Tengerészeti Akadémián alkalmazott eljárásban, általánosan igaz, hogy domináns stratégia a preferenciák felfedése. Amellett, hogy ez nem egy stabil párosító mechanizmus, a beiskolázási algoritmusok esetében egy másik probléma is felmerül, nevezetesen, hogy a különböző iskolák más-más prioritási sorrendbe rendezik a hallgatókat (például minden iskola a helyi hallgatókat veszi előre). Tehát a beiskolázási mechanizmusnak figyelembe és tudomásul kell vennie az iskolák ilyen jellegű preferenciáit. *Balinski–Sönmez* [1999]; *Abdulkadiroğlu–Sönmez* [2003] rávilágítanak, hogy a Gale–Shapley-algoritmus nemcsak hogy megfelel ezeknek az igényeknek, de még olyan további szempontok figyelembevételére is alkalmas, mint az úgynevezett szabályozott választás, ahol bizonyos korlátokat alkalmaznak a nemi, faji vagy etnikai alapú szegregáció csökkentésére.

Szingapúrban a tanulmányi eredmények alapján rangsorolják a hallgatókat (*Teo és szerzőtársai* [2001]), és – lényegében – az így kialakult sorrendben választhatnak iskolát. A problémát bonyolítja, hogy a felvételi lapok beküldése pillanatában még nem ismert a hallgatók tanulmányi eredménye, illetve a hallgatók csak hat iskolát nevezhetnek meg, s ha ezek egyikébe sem nyernek felvételt, akkor a megmaradt helyek valamelyikére, önkényesen, elsősorban fizikai közelség alapján kerülnek elhelyezésre.

A bostoni mechanizmus

Ezt az azóta sokat kritizált mechanizmust Bostonban (1999 és 2005 között) és még vagy fél tucat más városban (*Ergin–Sönmez* [2006], *Abdulkadiroğlu és szerzőtársai* [2005a]) használták. Az algoritmus a következő (*Abdulkadiroğlu–Sönmez* [2003]).

1. A jelentkezők és az iskolák kialakítják a preferenciáikat. Utóbbiak előnyben részesítik a diákok testvéreit, ezután a gyalogtávolságon belül lakókat és mindenekelőtt azokat, akikre mindkettő igaz. Ezen belül a sorrendet sorsolással határozzák meg.

2. Első körben csak az első helyen megjelölt iskolát veszik figyelembe. Minden iskola a hozzá jelentkezők között az így meghatározott preferenciák alapján, illetve a kapacitás függvényében osztja ki a helyeket.

3. A megmaradt hallgatókat a második helyen megjelölt iskolába próbálják elhelyezni.

4. És így tovább, egészen addig, amíg el nem fogynak a hallgatók.

A mechanizmus Pareto-optimális a megadott preferenciák alapján. Legnagyobb problémája, hogy a jelentkezőknek taktikázniuk kell. Nagyon kockázatos dolog ugyanis olyan iskolát első helyen megjelölni, ahova nagy a túljelentkezés, hiszen ha ide nem sikerül bejutni, könnyen lehet, hogy a második, harmadik, stb. helyen megjelölt iskolák is betelnek (Glazerman és Meyer [1994]). Ennek megfelelően a jelentkezők jelentős része taktikázni kénytelen (Chen és Sönmez [2006]).

18. tétel (Ergin–Sönmez [2006]). *A bostoni mechanizmusban az iskolák számára domináns stratégia a hallgatókat valós preferenciáik szerint rangsorolni. Minden más domináns stratégia pedig ezzel azonos párosítást eredményez.*

Tehát az iskoláknak akkor sem érdeke valótlan preferenciák megadása, ha erre a törvényi keretek lehetőséget biztosítanak. Ennek tükrében általánosan igaz a bostoni mechanizmusra az alábbi tétel:

19. tétel (Ergin–Sönmez [2006]). *Vizsgáljuk meg a stratégiai preferenciát kiválasztó játékot, ha P a valódi preferenciákat jelöli! A játék egyensúlyához tartozó párosítások halmaza pontosan megegyezik a P preferenciákhoz tartozó stabil párosításokkal.*

Fontos hangsúlyoznunk, hogy stabil párosításokat csak akkor kaphatunk, ha a jelentkezők megfelelően jelölik meg preferenciáikat.

Mivel a tétel általában stabil párosításokról szól, a *11. tétel* alapján a jelentkezők számára ennél gyengén jobb a hallgatók szempontjából optimális késleltetett elfogadási algoritmus. Ennek tükrében nem meglepő, hogy Boston a mechanizmus megváltoztatása mellett döntött 2005-ben (Abdulkadiroğlu és szerzőtársai [2005b], [2006]).

A columbusi algoritmus

A columbusi algoritmus sokban hasonlít a rezidensek központosítás előtti felvételi rendszeréhez, azzal a lényegi eltéréssel, hogy mivel az elfogadás után a jelentkező kikerül a rendszerből, nem kap utólag kedvezőbb ajánlatot, ami esetleg destabilizálhatná a rendszert, illetve nem merül fel a jogos irigység problémája sem.

A Columbus Cityben alkalmazott algoritmus a következő (Abdulkadiroğlu–Sönmez [2003] alapján).

1. Minden jelentkező legfeljebb három iskolát jelölhet meg.
2. Bizonyos iskoláknál garantált helye van az iskola körzetében lakóknak. Egyébként a jelentkezők rangsorát sorsolással határozzák meg.
3. A (még) szabad helyeket a fenti preferenciák figyelembevételével ajánlják meg a jelentkezőknek. Az ajánlatra három napon belül kell válaszolni. Elfogadás esetén a jelentkező kikerül a rendszerből, az elfogadott ajánlat alapján kerül beiskolázásra. Ahogy egyes ajánlatok elutasításra kerülnek, ezeket a helyeket megajánlják az egyelőre várólistás jelentkezőknek.

Sajnos azonban a stratégiai megfontolások itt is komoly szerepet kapnak. Egyáltalán nem világos, hogy mi alapján célszerű iskolát választani, illetve az iskoláktól kapott ajánlatot elfogadni. Az például világos, hogy a túljelentkezéssel terhelt legjobb iskolákba való jelentkezés ronthatja a jó iskolákba való bejutás esélyeit, hiszen előfordulhat, hogy a jelentkező egyik megjelölt iskolába sem nyer felvételt, és így a megmaradt helyek valamelyikére sorolják be őt.

A legjobbcsere-körök módszere

Az *Abdulkadiroğlu–Sönmez* [2003] által javasolt algoritmus lényege, hogy az iskolák által legjobbnak tartott hallgatók egymás között elcserélhetik a megszerzett helyüket. Előnye, hogy a hallgatóknak érdeke a valós preferenciák felfedése, tehát az algoritmus orvosolja az előbbi algoritmusok esetében felmerült problémák nagy részét.

1. Minden hallgató és iskola megnevezi mit/kit rangsorol az első helyre. Mivel a résztvevők száma véges, létezik olyan $s_1, C_1, s_2, \dots, C_k$ kör, hogy s_i a C_i -t preferálja, aki viszont s_{i+1} -t, továbbá C_k az s_1 -t preferálja. Minden hallgató és minden iskola legfeljebb egy-egy körhöz tartozik. Minden olyan hallgatót, aki egy ilyen körhöz tartozik, felveszi az általa megnevezett iskola. Ezzel a hallgató kikerül a rendszerből, az iskolának pedig eggyel kevesebb szabad helye marad. Ha minden hely elfogyott, akkor az iskola is kikerül a rendszerből, így a továbbiakban a hallgatók már nem nevezhetik meg, mint kedvencüket.

2. Minden további lépésben a megmaradt hallgatók és a megmaradt iskolák vesznek részt, ettől eltekintve a lépés lefolyása ugyanaz, tehát a résztvevők megnevezik a preferenciájukat, majd a körökhöz tartozó hallgatókat az általuk megnevezett iskola veszi fel.

3. Az algoritmus akkor ér véget, ha a hallgatók elfogynak. Mivel minden lépésben legalább egy hallgató felvételt nyer, a szükséges lépések száma nem több, mint a hallgatók száma.

20. tétel (*Abdulkadiroğlu–Sönmez* [2003]). *A legjobbcsere-körök mechanizmusa Pareto-optimális és stratégiabiztos.*

A mechanizmus nem eredményez stabil párosításokat, de lehetnek olyan helyzetek, amikor más szempontok fontosabbak. Így például *Abdulkadiroğlu–Sönmez* [2003] rámutat, hogy ha Columbus Cityben olyan fontos a helybeliek prioritása, hogy garantált helyük van az iskolákban, ez a mechanizmus közelebb áll a törvényhozó szándékához.

Összegzés

Az iskolai felvételi rendszereknek se szeri, se száma, ezek jó része azonban részben vagy teljesen önkényes, informális döntésen alapszik. Szerencsésebb esetben rögzítésre kerülnek bizonyos szabályok, de ezek lehetnek éppoly önkényesek. A párosítások irodalma lehetőséget kínál a mechanizmusok absztrakt, matematikai formában való megfogalmazására, majd ezek tulajdonságainak elemzésére. Bevezettük a matematikai modellt, a párosítások egyes tulajdonságait, és igazoltuk ezek jelentőségét. Megmutattuk, hogy a stabilitás és a stratégiabiztosság egyszerre nem teljesülhetnek, így nincs is egyértelműen legjobb párosítási mechanizmus.

Megvizsgáltunk tehát néhány mechanizmust, amelyek világos szabályrendszerüknek köszönhetően könnyen modellezhetők matematikailag. Az átláthatóság hátránya, hogy a hibák könnyebben észrevehetőek, bár a legtöbb esetben a felvételi rendszerek használói mindenféle matematikai modell nélkül mondtak ítéletet. Az NRMP késleltetett elfogadási algoritmusának bevezetése után az (önkéntes) részvétel igen magas volt, és a résztvevők elfogadták a rendszer ajánlásait. Ezzel szemben az Egyesült Királyságban bevezetett, csak felületes hasonlóságot mutató mechanizmusok kudarcot vallottak, a részvétel csak formális volt. Ugyanígy, a beiskolázási algoritmusok is meglehetősen nagy változatosságot mutatnak: itt a legtöbb kritika nem a stabilitással, hanem a stratégiai kérdésekkel kapcsolatos. Mivel a valódi preferenciák felfedése nem domináns stratégia (sőt: ez csak a legritkább

esetben előnyös), a jelentkezőknek nem kis fejtörést és izgalmat okoz a megfelelő jelentkezési taktikák kiválasztása (*Ergin–Sönmez* [2006]). Bár sok felvételi program dicsekszik azzal, hogy rendkívül magas arányban kerülnek hallgatók az első helyen megjelölt iskoláikba (*Glenn* [1991], *Glazerman–Meyer* [1994]). Ez nagyon jól hangzik, de sajnos ezek az értékelések azt nem vizsgálják, hogy mindez hogy viszonyul a résztvevők valódi preferenciáihoz.

Összefoglalónkban a felvételi rendszerek modellezésére használt kétoldalú párosításokat vizsgáltuk. *Biró* [2006] ad – magyar nyelven – egy szélesebb körű áttekintést.

Hivatkozások

- ABDULKADIROĞLU, A.–PATHAK, P. A.–ROTH, A. E. [2005a]: The New York City high school match. *American Economic Review*, 95. 364–367. o.
- ABDULKADIROĞLU, A.–PATHAK, P. A.–ROTH, A. E.–SÖNMEZ, T. [2005b]: The Boston public school match. *American Economic Review*, 95. 368–371. o.
- ABDULKADIROĞLU, A.–PATHAK, P. A.–ROTH, A. E.–SÖNMEZ, T. [2006]: Changing the Boston school choice mechanism. *Boston College Working Papers in Economics*, 639. Boston College Department of Economics.
- ABDULKADIROĞLU, A.–SÖNMEZ, T. [1998]: Random serial dictatorship and the core from random endowments in house allocation problems. *Econometrica*, 66. 689–702. o.
- ABDULKADIROĞLU, A.–SÖNMEZ, T. [1999]: House allocation with existing tenants. *Journal of Economic Theory*, 88. 233–260. o.
- ABDULKADIROĞLU, A.–SÖNMEZ, T. [2003]: School choice: A mechanism design approach. *American Economic Review*, 93. 729–747. o.
- ALCALDE, J.–BARBERA, S. [1994]: Top dominance and the possibility of strategy-proof stable solutions to matching problems. *Economic Theory*, 4. 417–435. o.
- BALINSKI, M.–SÖNMEZ, T. [1999]: A tale of two mechanisms: Student placement. *Journal of Economic Theory*, 84. 73–94. o.
- BIRÓ PÉTER [2006]: Stabil párosítási modellek és ezeken alapuló központi párosító programok. *Sigma*, 37. 153–175. o.
- BIRÓ PÉTER [2008]: Student admissions in Hungary as Gale and Shapley envisaged. Technical Report TR-2008-291. University of Glasgow, Department of Computing Science.
- BRAUN, S.–DWENGER, N.–KÜBLER, D. [2007]: Telling the truth may not pay off: An empirical study of centralised university admissions in Germany. IZA Discussion Papers 3261. Institute for the Study of Labor (IZA).
- CHEN, Y.–SÖNMEZ, T. [2006]: School choice: An experimental study. *Journal of Economic Theory*, 127. 202–231. o.
- DEMANGE, G.–GALE, D.–SOTOMAYOR, M. [1987]: A further note on the stable matching problem. *Discrete Applied Mathematics*, 16. 217–222. o.
- DUBINS, L. E.–FREEDMAN, D. A. [1981]: Machiavelli and the Gale-Shapley algorithm. *American Mathematical Monthly*, 88. 485–494. o.
- ERGIN, H.–SÖNMEZ, T. [2006]: Games of school choice under the Boston mechanism. *Journal of Public Economics*, 90. 215–237. o.
- GALE, D.–SHAPLEY, L. [1962]: College admissions and the stability of marriage. *American Mathematical Monthly*, 69. 9–15.
- GALE, D.–SOTOMAYOR, M. [1985]: Some remarks on the stable matching problem. *Discrete Applied Mathematics*, 1. 223–232. o.
- GLAZERMAN, S.–MEYER, R. H. [1994]: Public school choice in Minneapolis. Megjelent: *Downes, T. A.–Testa, W. A.* (szerk.), *Midwest approaches to school reform*. Federal Reserve Bank of Chicago, 110–126. o.
- GLENN, C. [1991]: Controlled choice in Massachusetts public schools. *Public Interest*, 103. 88–105. o.
- IRVING, R. W.–MANLOVE, D. F. [2009]: Finding large stable matchings. *ACM Journal of Experimental Algorithmics*, megjelenés alatt.

- KAGEL, J. H.–ROTH, A. E. [2000]: The dynamics of reorganization in matching markets: A laboratory experiment motivated by a natural experiment. *The Quarterly Journal of Economics*, 115. 201–235. o.
- KELSO, A. S.–CRAWFORD, V. P. [1982]: Job matching, coalition formation, and gross substitutes. *Econometrica*, 50. 1483–1504. o.
- KNUTH, D. E. [1976]: *Marriages Stables*. Les Presses de l'Université de Montreal, Montreal.
- NASH, J. F. [1950]: Equilibrium points in n -person games. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 36. 48–49. o.
- NASH, J. F. [1951]: Non-cooperative games. *Annals of Mathematics*, 54. 286–295. o.
- ROMERO-MEDINA, A. [1998]: Implementation of stable solutions in a restricted matching market. *Review of Economic Design*, 3. 137–147. o.
- ROTH, A. E. [1982]: The economics of matching: Stability and incentives. *Mathematics of Operations Research*, 7. 617–628. o.
- ROTH, A. E. [1984]: The evolution of the labor market for medical interns and residents: A case study in game theory. *Journal of Political Economy*, 92. 991–1016. o.
- ROTH, A. E. [1985]: The college admissions problem is not equivalent to the marriage problem. *Journal of Economic Theory*, 36. 277–288. o.
- ROTH, A. E. [1986]: On the allocation of residents to rural hospitals: A general property of two-sided matching markets. *Econometrica*, 54. 425–427. o.
- ROTH, A. E. [1991]: A natural experiment in the organization of entry-level labor markets: Regional markets for new physicians and surgeons in the United Kingdom. *American Economic Review*, 81. 415–440. o.
- ROTH, A. E. [2008]: Deferred acceptance algorithms: history, theory, practice, and open questions. *International Journal of Game Theory*, 36. 537–569. o.
- ROTH, A. E.–OLIVEIRA SOTOMAYOR, M. A. O. [1990]: Two-sided matching. A study in game-theoretic modeling and analysis. *Econometric Society Monographs* 18. Cambridge University Press, Cambridge.
- ROTH, A. E.–PERANSON, E. [1999]: The redesign of the matching market for American physicians: Some engineering aspects of economic design. *American Economic Review*, 89. 748–780. o.
- TEO, C. P.–SETHURAMAN, J.–TAN, W. P. [2001]: Gale-Shapley stable marriage problem revisited: Strategic issues and applications. *Management Science*, 47. 1252–1267. o.

Függelék

Az országos rezidenspárosító program (NRMP) algoritmusá

Az alábbiakban Roth [1984] alapján bemutatjuk az Egyesült Államok országos rezidenspárosító programjának (NRMP) algoritmusát.

Minden kórház rangsorolja a jelentkezőket (X -szel megjelölve a nem elfogadhatókat), és minden hallgató rangsorolja a kórházakat, amelyekhez jelentkezett (hasonlóan megjelölve az érdektelenekeket). Az így elkészített lapokat kell a központba eljuttatni, ahol első körben a kórházi rangsorokat megtisztítják a kórházat elfogadhatatlanként megjelölő hallgatóktól, és ugyanígy a hallgatók rangsorát az őket elfogadhatatlanként megjelölő kórházakétól. A szerkesztett listák tehát elfogadható alternatívákat rangsorolnak.

Ezeket a listákat egy feldolgozó algoritmusba táplálják, amely egyrészt egy párosító fázisból, majd egy próbapárosítás és javítás fázisból áll. A párosító fázis első lépése (az 1/1. lépés) azt vizsgálja, hogy akadnak-e olyan kórházak és hallgatók, amelyek egymás rangsorában első helyen szerepelnek. (Ha egy H_i kórház kvótája q_i , akkor mindez a q_i első helyen rangsorolt hallgatóra vonatkozik.) Ha nincs ilyen találat, akkor az algoritmus rátér a 2/1. lépésre. Itt a hallgatók listáján második helyen szereplő kórházakat viszonyítjuk a kórházak listáján első helyen szereplő nevekkel. Ha nincsenek találatok, az algoritmus továbblép. Általában a $k/1$. lépésben a párosító fázis során olyan hallgató–kórház párokat keresnek, hogy

a kórház a hallgatót az első helyre sorolja, a kórház pedig k -adik helyen szerepel a hallgatók rangsorában. Ha valamely k -ra van találat, akkor rátér a második fázisra.

Itt a talált párt ideiglenesen összepárosítják, azaz a hallgatót, akit az általa k -adik helyen megjelölt kórház első helyen rangsorol, ehhez a kórházhoz rendeljük. Ekkor a hallgatók és a kórházak rangsorait a következő módon módosítjuk. Minden kórház, amelyet az s_j hallgató hátrébb rangsorol, mint jelenlegi, ideiglenes párját, törlésre kerül (ha tehát most a k -adik preferenciájához került, akkor csak az első k tagot tartjuk meg). Egyúttal s_j -t töröljük minden, s_j listájáról törölt kórház listájáról (tehát ezen a listán már csak olyan hallgatók maradnak, akik még nem kerültek egy preferált kórházhoz). Vegyük észre, hogy ha egy kórház preferált hallgatóját töröljük a rangsorából, azzal a többi hallgató eggyel előrébb lép, hiszen így ugyanazon kvóta mellett kevesebb hallgatót tartalmaz a rangsor. Miután a rangsorokat frissítettük, az algoritmus visszatér az első fázisba, ami a frissített rangsorok mellett keres párokat. Bármilyen új párosítás felülírja az aktuális, ideiglenes párosításokat. (Megjegyzendő, hogy az új párosítás csak javíthat a hallgató meglévő hozzárendelésén, hiszen a hátrébb rangsorolt kórházakat töröltük.) Az algoritmus véget ér, ha nem talál új ideiglenes találatokat, ekkor az ideiglenes párokat véglegesíti. A pár nélkül maradt hallgatók vagy kórházi helyek nem kerülnek párosításra, és közvetlenül próbálhatnak más párosítatlanul maradt hallgatókkal, illetve helyekkel egyezkedni.