Közgazdasági Szemle, LII. évf., 2005. október (723–735. o.)

BRÓDY ANDRÁS

# Az input-output módszer hibatűrése

**Az input-output számítás érzékenységét vizsgálom. A mátrixok sajátértékeinek pontosságát elemzem a 2000. évi magyar ágazati multiplikátor számítása során. A gazdaság szüntelen ingadozása, nem egyensúlyi állapota külön figyelmet érdemel. Ezért indulok ki a sajátértékekből, mert ilyen körülmények közt ezek állapíthatók meg a legpontosabban. Megmutatom azt, hogy Leontief-inverz használata csökkentheti a kiinduló adatok hibáját, mert diagonálisa domináló, és mátrixa jól kondicionált. Egyes más, javasolt számítási módszerek hibajavító, kiegyenlítő sajátosságait külön is elemzem.***
**Journal of Economics Literature (JEL) kód: C65, C67, C68.**

Ha ismerjük egy adott év teljes termelésének input-output táblázatait, akkor ezekből kiszámítható az egyensúlyi növekedés és az átlagprofit rátája, az éppen érvényesülő multiplikátor értéke és ennek ágazati eltérései, a termelés és az árak arányrendszere, valamint a bővítés és a növekedés ciklusainak jellemzésére szolgáló számos további érték. Mivel azonban a kiinduló adatok mindig hibákkal terhesek, ezért a számított eredmény sem lehet pontos. Az alapkérdés az, miként viselkedik a hiba a számítás folyamán. A hibakorlát növekedhet. Ekkor az eredmény a kiinduló adatoknál pontatlanabb. Lehet azonban, hogy a hibák nem halmozódnak. Ekkor az eredmény éppannyira jó vagy rossz, mint maga az adat. Jól választott modell és számítási eljárás azonban a hiba zsugorodásához is vezethet. Az eredmény ekkor jobb és pontosabb, mint az adatfelvétel.

A hibaszámítás kezdettől fogva része e modell vizsgálatának (*Bródy* [1964]). Most az új alkalmazások és a modellváltozatok a vizsgálat kiterjesztését kívánják. Különösen fontossá válik ez a ciklusok szerepének felismerése után. A ciklikusnövekedés, az egyensúly állandó megsértése, az árak és mennyiségek folytonos ingadozása ugyanis kérdésessé teszi a kiinduló adatok megfelelő mérését is. Ha az árak és mennyiségek állandóan változnak, akkor ez csorbítja – vagy akár lehetetlenné is teheti – a kiinduló adatok pontos megállapítását.

## A pontosságról

A számítógépek adta új számítási lehetőségek pontosságának kérdését mai formájában *Neumann–Goldstine* [1947], [1951] klasszikus műve vetette fel, amely a nagyméretű mátrixok gépi inverziójáról szólt. A szerzők a hibák négy forrását jelölték meg. Az első

* A kutatást az OTKA T. 049504 ny. számon támogatta. Köszönettel tartozom *Vanicsek Mária* és *Simonovits András* észrevételeiért.

*Bródy András* az MTA Közgazdaságtudományi Intézetének tudományos tanácsadója.

kettő a szakterületről ered, ez a modell (teória) és a megfigyelés (mérés) elégtelensége. A matematikusokra tartozik a másik két hiba, amit a számítási eljárás (program, algoritmus) és a korlátos gépi pontosság (csonkítás és kerekítés) okozhat. A szakmai és a matematikai okfejtés mégis összefonódik, mert a szakmai elmélet az alkalmazás és a tényleges számítások menetében alakul ki. A számítási módszer és gépi technika fejlődését ugyanis éppen a szakmai elméletek szükségletei ösztönzik. A mélyebb kérdések a mérési módszerek elméleti és gyakorlati, szakmai és matematikai kialakítása és próbálkozásai során merülnek fel.

A gazdasági megfigyelés, megkülönböztetés, rendezés és mérés, valamint a mérési skálák fejlődése során a mérés három kritikus, vagyis át nem hágható korlátja merül fel.[1] Ebből kettőt, a definíciók (az elmélet és modell) jóságát, valamint a mérés megbízhatóságát már Neumann említi, a harmadikat azonban a számítás célja és feladata határozza meg. Egymáshoz való viszonyuk, tehát a kritikus korlátok viszonylagos nagysága döntően befolyásolja a munkát. Mégis egyre gyakrabban történik meg, hogy a vizsgált sajátosság vagy hatás mibenlétét és működését csak elnevezik, de nem határozzák meg kellően. Ez esetben még rendszeres mérése sem lehetséges. Ennek következtében a tárgyalt jelenség mértékegysége és mérése bizonytalanná válik. Ilyenkor a meghatározás életlensége, a mérés alapvető nehézsége vagy fejletlensége reménytelenné és megbízhatatlanná teszi a tárgy behatóbb vizsgálatát. A felhasznált szavakat ugyanis jól meghatározott fogalmakká kell csiszolni, hogy mérésük lehetővé és egyértelművé, az eredmény pedig elfogadhatóvá váljon.[2] A mérés és annak megkövetelhető pontossága ezért alapfeltétele bármely szakterület és kérdés tudományos tárgyalásának.

Bár a gazdasági statisztika gazdagabbá és rendszeresebbé vált a második világháború után, és adatainak megbízhatósága is javult valamelyest, lényegében ma is érvényes *Morgenstern* [1952] tartózkodó jellemzése. Ez úgy foglalható össze, hogy a közölt alapadatoknak legfeljebb csak három első számjegyét vehetjük komolyan.[3] Sajnos, az adatok összeállítói továbbra sem hozzák nyilvánosságra véleményüket az általuk közölt számok hibáinak bármiféle nagyságáról vagy tapasztalt eloszlásáról. A pontosságot ilyenkor is az alapvető adatok megfigyelése és mérése korlátozza, de ez olyan terület, amiről a statisztikus ritkán és igen óvatosan szól. A publikációk nem említenek hibákat, a mérnöki és tudományos gyakorlattal ellentétben nem vált bevett szokássá a mért adat tűrési határainak feltüntetése.

Az input-output számítás tekintetében mégis rendelkezünk írott tapasztalattal. Augusztinovics Mária számolt be arról, hogy milyen és mekkora adathibák merültek fel a tervezés gyakorlatában, ezt hogyan ismerték fel, és miként küszöbölték ki (*Augusztinovics* [1996]).[4] A tanulmány egyben azt is megmutatta, hogy mit tekint a gyakorlat pontosnak, azaz olyannak, amikor a további hibakeresés már abbamarad, mert nagyobb fáradság sem hoz érdemi javulást. Morgenstern nézetével összhangban ez mintegy ±félszázalékos

[1] Ezt Jánossy Ferenc fogalmazta meg először (*Jánossy* [1963]). A modern növekedéselmélettel kapcsolatban Ian Steedman különösen élesen bírálta a nem mérhető, illetve az ordinális, esetleg kardinális mértékkel rendelkező jelenségek folytonos keveredését (*Steedman* [2003]).

[2] Például a „tudás szintjének” a növekedés ütemére gyakorolt hatása még képzeletben sem vonható be valaminő szélső érték kiszámításába. Ez a fogalmi létezés követelményeit nem teljesítő szó (vajon a fejekben vagy pedig a könyvtárakban meglévő, avagy a gyakorlatban alkalmazott tudásra vonatkozik-e?) ma még nem mérhető. Még csak nem is rendezhető (vajon az angol vagy a német „szint” a magasabb?). Ha pedig változóként nem számszerűsíthető egyértelműen, akkor differenciálhatósága se tételezhető fel.

[3] Ez úgy képzelhető el, hogy az értékeket grafikonokon feltüntetve, toleranciájuk az ábrázolás jeleinek vagy görbéinek vastagságánál nem szűkebb. Csak a szemmel is látható hiba vagy eltérés érdekes.

[4] A hiba a nemzeti jövedelem mintegy 10 százaléka, tehát a teljes forgalom mintegy 5 százaléka volt. A hibát a kétoldalú összevetés (termelés és fogyasztás cellánkénti egyeztetésének) módszerével a gyakorlatban mintegy félszázalékos toleranciára lehetett leszorítani.

hiba megtűrését jelenti.[5] Ennél nagyobb pontosságra ma, úgy tűnik, nincsen lehetőség. Ez az állapot a nemzeti számvetések terén a közeli jövőben sem fog változni, még a fejlettebb számítógépes nyilvántartások sem hoznak itt számottevő javulást, legfeljebb az adatok összevethetőségét, egyöntetűségét szavatolhatják majd az eddiginél hosszabb időtartamokra.

Kétségtelen viszont, hogy a matematikai feldolgozás precizitása sokat javult. Az itt tárgyalt operációk (lineáris egyenletek megoldása, inverzió, spektrális felbontás) tíz értékes jegyet meghaladó – tehát a számítás eredményének célszerű pontossága szempontjából megbízható – eredményt ad. Ez még a gyakorlatban megalkotott legnagyobb adathalmazra, az Egyesült Államok 600 szektoros mérlegére is vonatkozik, és ennél sokkalta nagyobb adatbázisok esetén is fennáll.

Az input-output elmélet egyik legfontosabb eszköze Leontief inverze. Ennek a valószínűség-számítás módszerével történő vizsgálatához *Simonovits* [1975] fogott hozzá. Bemutatta, hogy ha a ráfordítási mátrix elemei független valószínűségi változók, akkor a várható értékekből számított inverz az inverz várható értékének alsó korlátja. Ez abból következik, hogy a valószínűségi változó várható értékének négyzete, köbe stb. mindig kisebb, mint e változó négyzetének, köbének stb. várható értéke. Várható értékük szorzata viszont azonos a szorzat várható értékével. Ez a kétféle eredménye csak akkor lehet egyenlő, ha a „változó” nem változó, hanem konstans. Az inverzió és a várható érték képzése tehát általában nem felcserélhető műveletek. Elvégzésük sorrendje kihat az eredményre. Ha azonban a mérés hibái nem függetlenek egymástól, akkor az inverz alábecslése is előfordul.

Simonovits rövid jegyzete sok követőre talált. Máig már több mint 30 tanulmány és könyv idézett forrása lett. E dolgozat is figyelembe veszi mindezeket, de részben más úton jár. Egyrészt a mátrixok sajátértékeinek becslésére összpontosít, másrészt elméleti eloszlások helyett a tényleges számításokban megjelenő értékekre, tehát nem az elméleti valószínűségekre, hanem a gyakorlatban tapasztalt gyakoriságokra támaszkodik. 1980-ban ugyanis Leontief professzor irányításával a Battelle Laboratórium a korrózió amerikai költségeit vizsgálta. Azt a kérdést tették fel, hogy az akkori új, *„best practice”* védelmi eljárások általános alkalmazása mibe kerülne, és mekkora megtakarításhoz vezethet. A becsült adatok bizonytalansága sok kérdést vetett fel. Az eredmény érzékenységének vizsgálata azonban a benne szereplő bizalmas üzleti információk miatt nem került nyilvánosságra. A munka során azonban kiderült, hogy megbízhatóbb, szorosabb és gyakorlatibb az a becslés, amely magára az adatokra és ezek gyakorisági eloszlásaira épít. Az ennél szabatosabb, de csak feltételezhető eloszlásokból kiinduló számítások néhol laza korlátokhoz vezettek. Ha lehet, akkor a vizsgált adathalmazból kell kiindulni, mert ez a számítás során nyílt vagy burkolt útbaigazítást adhat hibái lehetséges és vélhető korlátjairól és okairól. Igaz, a gyakorlati eloszlások valódi ereje csak viszonylag nagyobb modell esetében mutatkozik meg.[6]

Mielőtt azonban nekilátnánk feladatunknak, még egy kérdésre kell kitérni. Amikor valamely számítás hibáját megállapítjuk (ha azt egyáltalán meg lehet állapítani: mert lehet, hogy a hibát is csak becsülni tudjuk), akkor még általában nem ismeretes, hogy az elmélet, a mérés és/vagy a számítás pontatlansága felelős-e érte. A kutatás eszköze persze mindig a hibaszámítás és a perturbációk matematikai elmélete. De a hiba mérése és értelmezése egyaránt segíti a számítás, a szakmai elmélet és a mérési módszer fejlődését.

[5] Ez felelt meg Jánossy Ferenc gyakorlatának is, aki mérnök lévén a logarlécen leolvashatónál pontosabb mérésre nem is törekedett.

[6] E tézis szigorú bizonyítása és korlátjainak ismerete a valószínűségek *véges* elméletének Rényi Alfréd és Erdős Pál által tervezett, de befejezetlenül maradt fejezeteire tartozna.

Ezért fontos az, hogy a hiba forrásainak éles megkülönböztetése ellenére a tárgyalás során az érvelés és gondolkodás mindhárom területre támaszkodjon, s csak az elvégzett munka után próbálja szétválasztani a hibák vélhető eredetét.

Pontosabban szólva: a számítási hiba kiszűrhető a számítás ellenőrzése vagy megismétlése útján.[7] Az elmélet és a mérés hibáinak egymástól történő elválasztása gyakran mégis kétséges marad, mivel a mérés szabatossága nem növelhető tetszőlegesen. Talán ezért is találunk szakmánkban oly' sok egymásnak ellentmondó elméletet, amelyek felett a tapasztalat még nem hozhatott egyértelmű és végleges ítéletet. E dolgozat ezért egyaránt tekinthető az elméleti hibaszámítás gyakorlati alkalmazásának, és a multiplikátor hibáinak tapasztalati becsléséből kiinduló mérték kialakításának. Sorra szemügyre veszi az input-output modell, illetve ennek mátrixaival végzett legfontosabb számítások megbízhatóságát.

## A nyílt modell

Az első és különösen aggasztóvá vált kérdés az, hogy az árak és mennyiségek nem egyensúlyi volta mennyire zavarja meg az alapadatok megfigyelését és mérését, vagyis az $\mathbf{A} = \{a_{ik}\}$ folyó ráfordítási mátrix elemeinek megállapítását. Mi a következménye annak, hogy a legalapvetőbb kiinduló adatok összesítése ismeretlen, és vélhetően nem egyensúlyi árak és mennyiségek alapján történt meg? Ezt az eredeti, a számítások és az adatfelvétel mögött megbúvó, lappangó egyensúlyt részletesen és pontosan sohasem ismerjük. Elméleti modell felállítása nélkül nem is létezhet egyensúlyi ár.[8] A valóságban az árrendszerek és arányrendszerek csak valamilyen modellel végzett számításból ismerhetők meg, mégpedig éppen és csakis a modellek adta részletezésben. Az egyensúly nem a gyakorlatban, hanem az elméletben jelentkezik. A gyakorlati helyzet csak közel vagy távol lehet valamely elméleti követelményhez, de sohasem lesz azzal teljesen azonos.

Az input-output elmélet szerint a kiinduló együtthatókat úgy kell meghatározni, hogy az egyes $p_i a_{ik} x_k$ értékáramlatokat tartalmazó cellákat a $k$-adik oszlopban a $p_k x_k$ teljes termeléssel osztjuk el. A kapott koefficiens értéke így $p_i a_{ik}/p_k$. Ez már csak az áraktól függ, mert a termelt mennyiségek $\mathbf{x}$ vektora kiesik az osztás folyamán. Ha most $<\mathbf{p}>$ jelöli a $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ tényleges árakból összeállított diagonális mátrixot, akkor a koefficiensek mátrixa a

$$<\mathbf{p}>\ \mathbf{A}\ <\mathbf{p}>^{-1} \qquad (1)$$

alakban adott. A kapott mátrix független az $\mathbf{x}$ mennyiségektől, de változik a $\mathbf{p}$ árrendszer minden változásával. Mégis segít az a körülmény, hogy az (1) egyenlet az elméleti együtthatók $\mathbf{A}$ mátrixának hasonlósági transzformációja. Ez pedig *nem* változtatja meg a mátrix sajátértékeit. Ez azt jelenti, hogy a sajátértékekkel kifejezhető összes eredmény, tehát az elméleti profitráta, a növekedési ráta (vagy a ciklusok hossza), továbbá a helyesen átlagolt multiplikátor nem függ az adatok felvétele idején éppen érvényesülő árak rendszerétől vagy rendszertelenségétől. A mérés során használt mérték változása vagy torzulása nem gyakorol befolyást a kapott eredményre. Semmiféle pontatlanságot vagy változást

[7] Még ez sem olyan egyszerű. A káosz matematikai elméletének megalkotása után világossá vált, hogy vannak olyan egyenletek, amelyek megoldása során a számítás ismétlése új és más, esetleg távoli eredményt ad.

[8] Ez az állítás éles ellentétben áll a statisztika, sőt a gazdaságtan jelenlegi gyakorlatával. Ma felteszik, hogy az árak egyensúlyban vannak, vagy ahhoz elég közeliek, vagy a megfelelő indexek segítségével kiigazíthatók. Ez a feltevés a növekedési pálya ciklikus voltának elismerése esetén tarthatatlanná válik.

nem okoz a keresett sajátértékek tekintetében az, ha a mérésre alkalmazott árak rendszere nincs egyensúlyban. Bármilyen pozitív árrendszer egyaránt alkalmas a mérésre, ha azt egyöntetűen és következetesen alkalmazzák a modell egészére. Ez egyben indoka annak, hogy az érzékenységi vizsgálat éppen a sajátértékek valódi és a fentiek szerint pontosan megismerhető nagyságából indul ki.

Vigyázni kell azonban arra, hogy mit *nem* jelent ez az állítás. Nem azt mondja ki, hogy a torz árak nem érintik a gazdasági életben felhasznált mennyiségeket, hogy nem vezetnek olyan helyettesítésekre, amelyek befolyásolják a sajátértékeket és így tovább. Pusztán azt fejezi ki, hogy nem kell attól tartani, ha hibás, nem egyensúlyi árakkal készített modell látszólag torzítja a gazdaság pillanatnyi helyzetét és a számítás eredményét. Bármilyen árakat alkalmaz a statisztikus az adatfelvétel során, ha következetesen jár el, tehát azonos termékeket azonos áron számol el, akkor a kapott együtthatók lehetővé teszik a sajátértékek szabatos megismerését, tehát a mérést és a kapott eredmények segítségével az elemzést is.

Azt sem jelenti, hogy a $\mathbf{p}'\mathbf{Ax}/\mathbf{p}'\mathbf{x}$ (az úgynevezett Raleigh–Aitken-hányados), azaz a ráfordítás és a termelés viszonya pontosan méri a rendszer elméleti hatásfokát. Az utóbbi a mátrix legnagyobb és pozitív sajátértéke (vagy ennek reciproka, ha azt a termelés és ráfordítás viszonyával $\mathbf{p}'\mathbf{x}/\mathbf{p}'\mathbf{Ax}$ alakban definiáljuk).[9] Ebben a mutatóban a termelési arányok is szerepet játszanak. Az így mért hatásfok a gyakorlatban nagyobbnak is, kisebbnek is adódhat az elméletinél. Annál jobban közelíti meg az utóbbit, minél jobban közelíti az ár és a termelés a mátrix megfelelő sajátvektorait. A hányados azonban jó becslése a mátrix legnagyobb sajátértékének akkor is, ha a sajátvektorok kissé hibásak, azaz még nem ismeretesek pontosan.

A fenti hányadossal, az éppen érvényes arányokkal való számítás a rendszer pillanatnyilag érvényesülő hatásfokát méri. Az árak és mennyiségek eltéréséből vagy pontatlan méréséből származó hiba százalékos nagyságát ezért külön is vizsgálni kell.[10] A kérdés ekkor az, hogy ha az $\mathbf{x}$ termelési vektor $\pm\xi$ és a $\mathbf{p}$ árvektor $\pm\pi$ százalékos hibája okozza a hatásfok rossz becslését, akkor e vektorokban lévő hibák miatt mennyire térhet el az így kapott érték a feltételezhető elméleti nagyságtól. Az is érdekes azonban, hogyan lehet az így kapott hibát csökkenteni. Ez nyilván lehetséges, mert e vektorok a mátrix segítségével (általában éppen a megismételt beszorzással) gyorsan és egyszerűen javíthatók, sőt, tetszőlegesen pontossá tehetők. A szorzások figyelmes elvégzése alkalmával fény derülhet az eljárás konvergenciájának sebességére, tehát a szubdomináns sajátérték nagyságára is, valamint az adott esetben a számítást éppen megzavaró főbb tényezőkre is.

## *A gyakorlati és az elméleti hatásfok*

Az elkövetett hibát könnyű becsülni. A szorzatok százalékos hibakorlátja hozzávetőleg a szorzók relatív hibáinak összege. A vektor hibája a hányados képzésekor legföljebb a mátrix szubdomináns sajátértékével szorzódik. A domináns sajátértékkel való szorzat

[9] E hányadosokat eredetileg szimmetrikus mátrixokra definiálták. Ekkor a jobb és bal oldali vektorok azonosak. Itt értelemszerűen a megfelelő, de egymástól eltérő vektorokat használjuk (lásd még *Simonovits* [1969]).

[10] A hibát két okból is viszonylagos, százalékos formában kezelem. Egyrészt sajátvektorokról lévén szó, ezeknek csak arányaik adottak, szintjük tetszőleges. Másrészt a közgazdászt és a mérnököt éppen a hibakorlát százalékos nagysága szokta érdekelni. Hasonlóan az említett korróziós vizsgálatokban a „legjobb technikát” felbecsülő értékeket és ezek bevezetésének költségét nem mindig tudták egész pontosan becsülni a mérnökök, de abban már biztosak voltak, hogy adataik 1, 5, 10 vagy 20 százalékos toleranciával vagy csak nagyságrendileg használhatók.

pontos eredményt ad. A vektor hibái tehát csak az erre merőleges alterekben hatnak. Ezek azonban nem okozhatnak a szubdomináns sajátértéket meghaladó mérvű változást. Az eredmény hibája ezért mindig zsugorodik. A kontrakció erős. A szubdomináns sajátérték a mátrix $n$ szektorszámával csökken, mégpedig $1/\sqrt{n}$ arányban.[11]

Ha tehát a kiinduló adatok hibái $\pm 10$ százalékosak, akkor a hatásfok becslési hibája nagyobb mátrixok esetében már csak néhány százalék. Az eredmény hibája jóval kisebb a kiinduló vektorok hibájánál, és sohasem haladja meg a pontosabb vektor hibakorlátját. (Ha például a két vektor egyike szabatos, tehát hibátlan, akkor a másik vektor hibája, bármekkora legyen is az, teljesen hatástalanná válik). A mátrix nagyobbá és részletesebbé válásával az ilyen hiba egyre jelentősebben csökken. Ez persze csak addig érvényes, amíg a részletezés nem növeli a szorzóvektorok százalékos hibakorlátját.

A Raleigh–Aitken-hányados ismert hibacsökkentő hatása nagy mátrixokra alkalmazva roppant hatékony. Általában igen gyorsan javítja a becslést. Az általános esetben egy, legfeljebb két lépésben (amikor a mátrix segítségével „iterált", vagyis beszorzott vektorokat használunk) gazdaságilag pontos, kifogástalan eredményt ad, még akkor is, ha az indulóvektorok hibája a fentieknél nagyobb. Az eljárás tehát a sajátérték becslésének befejező lépéseként – már csak ellenőrzésként is – melegen ajánlható. Tapasztalatom szerint az eredmény megbízhatóságát (tehát a már egzaktnak tekinthető helyértékek számát) minden lépéssel megkétszerezi. Ezt a tanácsot a mátrixszámítás alapvető művei is alátámasztják.

## A ráfordítási mátrix más hibái

A bemutatott összefüggések nem vonatkoznak azokra az esetekre, amikor maga az adatgyűjtés hiányos, vagy (például a piaconként eltérő árak miatt) nem egységes árakon történt meg. Ekkor is feltehetjük azonban, hogy a hibák nem haladják meg az $\mathbf{A}$ mátrix valamilyen $\pm d\mathbf{A}$ nagyságú korlátját. Itt is a mátrix spektrális felbontása ad lehetőséget a sajátérték ebből következő változásának becslésére. A mátrix $d\mathbf{A}$ változása ugyanis a sajátérték $\alpha$ nagyságát $\alpha + d\alpha$, a $\mathbf{p}'$ sajátvektort pedig $\mathbf{p}' + d\mathbf{p}'$ nagyságúvá változtatja. Ekkor

$$(\mathbf{p}' + d\mathbf{p}')\{\mathbf{A} + d\mathbf{A}\} = (\alpha + d\alpha)(\mathbf{p}' + d\mathbf{p}'). \tag{2}$$

Elvégezve a szorzást

$$\mathbf{p}'\mathbf{A} + \mathbf{p}'d\mathbf{A} + d\mathbf{p}'\mathbf{A} + d\mathbf{p}'d\mathbf{A} = \alpha\mathbf{p}' + \alpha d\mathbf{p}' + d\alpha\mathbf{p}' + d\alpha d\mathbf{p}'. \tag{3}$$

Levonva a $\mathbf{pA} = \alpha\mathbf{p}$ egyenlőséget, elhagyva a magasabb rendű differenciákat, majd a jobb oldali $\mathbf{x}$ sajátvektorral szorozva

$$\mathbf{p}'d\mathbf{A}\mathbf{x} + d\mathbf{p}'\mathbf{A}\mathbf{x} = \alpha d\mathbf{p}'\mathbf{x} + d\alpha\mathbf{p}'\mathbf{x}. \tag{4}$$

Figyelembe véve, hogy $\mathbf{Ax} = \alpha\mathbf{x}$, s ezért $d\mathbf{p}'\mathbf{Ax} = \alpha d\mathbf{p}'\mathbf{x}$, végül

$$\mathbf{p}'d\mathbf{A}\mathbf{x} = d\alpha\mathbf{p}'\mathbf{x}. \tag{5}$$

Vagyis a sajátérték változása első közelítésben $d\alpha = \mathbf{p}'d\mathbf{Ax}/\mathbf{p}'\mathbf{x}$.

[11] A tényleges érték magasabb és alacsonyabb is lehet. A korróziós vizsgálatban ez az érték mintegy 0,05 körül állt. (Ezért jobb nem elméleti értékkel, hanem a mátrix tényleges sajátértékeivel számolni.) Egyetlen szorzás már huszadára csökkentette a kiinduló vektor relatív hibakorlátját. Lehetséges azonban, hogy a szubdomináns sajátérték nagyobb, mint várható lenne. Erre is lesz példa a következőkben (lásd még *Molnár–Simonovits* [1998]).

A becslés itt ismét Raleigh–Aitken-féle hányadoshoz vezetett, de most a $d\mathbf{A}$ hibára alkalmazva. A sajátérték változását tehát a megfelelő sajátvektorokkal lehet becsülni. Ez a mátrix *minden* sajátértékére érvényes. A közelítés a négyzetes tagokat elhanyagolja. Biztonságosan alkalmazható, míg a mátrix vélhető hibája nem haladja meg a $\pm 10$ százalékot. Ezt a mai mérlegszámítások, ágazati és népgazdasági mérlegek esetében már bízvást feltehetjük.[12] Ekkor az elhanyagolt tagok a becslést legfeljebb egy százalékkal torzíthatják. A hányados azt mutatja tehát, hogy ha a hiba abszolút nagyságát egyensúlyi árakon mérjük, akkor ezt a teljes termeléshez viszonyítva, a sajátérték változását fejezzük ki. Nem hibázunk nagyot akkor sem, ha a méréshez a tényleges árakat használjuk fel. Biztosabb eredmény népgazdasági számításokban ma még aligha érhető el. Ezért minden esetben ajánlatos ezt a sajátos hibabecslő eljárást elvégezni.

## Az inverz hibája

Leontief inverzének spektrális felbontása ugyanazokat a sajátvektorokat adja, mint az **A** mátrixé, sajátértékei azonban $1/(1 - \alpha_i)$ nagyságúak. Abszolút értékük szerint csökkenve rendezzük az eredeti mátrix sajátértékeit az $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sorba. Itt az 1 index jelölje a legnagyobbat, $n$ pedig a szektorok számát. Az $(1 - \mathbf{A})$ mátrix inverzét uraló diád az eredeti **A** mátrix legnagyobb, $\alpha_1$, sajátértékéhez tartozik. Esetünkben ez tartalmazza az adatokban fellelhető információ zömét. Ez a legpontosabban meghatározott, mert leginkább mentes a hibáktól. Alakja lényegében az együtthatók sor- és oszlopösszegeivel arányos, ezek pedig az egyes együtthatók hibájánál nagyságrendileg pontosabban állapíthatók meg. A többi diád ennél jóval kisebb mértékben „nyújtja”, valójában azonban zsugorítja a vektorok hibás adatait, s ezzel a bennük rejlő hibákat.

A mérési-megfigyelési hiba inverzió esetén csökken ugyan, de egyes individuális értékek mégis abszolút növekedést mutathatnak. Ennek ellenére a Leontief-inverz lényegében csökkenti az adatok relatív hibáját. Másként állna a dolog, ha egy viszonylag nagy vagy akárcsak átlagos hibájú diád zérushoz közel álló – tehát nagyon kicsi – sajátértékhez tartozna.[13] Ennek a diádnak az inverzió után bekövetkező elkerülhetetlen uralma (mivel sokszorosára növekszik) hibanövelő hatású. Ez a jelenség gyakorta borítja fel az egyébként logikusan elgondolt számítást. Leontief-inverzben azonban, képzési előírásának következtében nem fordul elő ilyen diád. Még ha nem csökkenti is a hibát, stabil szerkezete miatt jól kondicionált.

Hangsúlyozandó, hogy nem a ráfordítási együtthatók mátrixa, azaz a kiinduló **A** mátrix a jól kondicionált, hanem csak a Leontief-inverze és számításának leírt módja. Az $(1 - \mathbf{A})$ mátrix kondíciószáma a domináns és egységnyi diagonális miatt biztosan alacsonyabb. Ezzel hibatűrővé, sőt esetenként hibakiegyenlítővé válik az inverz. Egy mátrix kondíciószáma a legnagyobb és a legkisebb abszolút sajátértékének hányadosa. Ha ez kisebb 10-nél, akkor a számításnak legfeljebb utolsó helyértéke csorbul. Ha azonban a kondíciószám magas, akkor tízes számrendszerbeli nagyságrendje ugyanennyi számjegy hatását emészti fel az eredményben. Ez az érték nagyobb **A** mátrix esetében százszoros, sőt a mátrix közel szinguláris volta esetén még ennél nagyobb is lehet. Ennek pedig az a

[12] E feltevés csak akkor válik kérdésessé, ha az elméleti modellt ki kívánjuk terjeszteni eddig még nem mért, tehát józerivel ismeretlen területekre.

[13] Ez történik meg regressziós számítások esetében, amikor a végzett megfigyelések mátrixának sajátértékei közt (a gyakori multikolinearitás következtében) egy vagy több esik közel zérushoz. Az inverzió után ez dominálja az eredményt, és azt néha teljesen értelmetlenné, sőt értelmezhetetlenné torzítja. Persze a szórások növekedése rámutat a számítás megbízhatatlanságra, ez azonban ezzel nem válik orvosolhatóvá.

következménye, hogy megsemmisül a teljes kiinduló információkészlet. Ezzel szemben az (1 – **A)** mátrix kondíciószáma még akkor is alacsony, ha az **A** mátrix esetleg szinguláris.

A vizsgált számítások **A** mátrixa nemnegatív és irreducibilis. Legnagyobb sajátértéke általában valamivel kisebb egynél. A mátrix kondíciószáma helyett ekkor a legkisebb abszolút értékű sajátérték is jó tájékoztatást ad a számítás várható megbízhatóságáról. Ha ez közel kerül zérushoz, akkor a mátrix majdnem szinguláris. Ez esetben a számítás nagy hibákat eredményezhet. Ennek következtében a hibakorlát a számítás folyamán nagyon megnövekszik.

Simonovits idézett jegyzete és annak tételei alapján sajátos, de mégis valós arányokat leíró számpéldát szerkesztettem e tulajdonság bemutatására. Legyen a szabatos mátrix **A**, ennek mintegy 10 százalékos viszonylagos mérési hibája pedig **H**. Ez a mérési hiba azonban ne zavarja meg a mátrix sorainak és oszlopainak összegét. A teljes elosztandó termelést és költséget ugyanis a statisztikai adatokból viszonylag jól ismerjük (itt: hiba nélkül). A hibák eloszlása ezért kiegyenlítő jellegű.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0{,}04 & -0{,}04 \\ -0{,}04 & 0{,}04 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A}+\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0{,}44 & 0{,}46 \\ 0{,}46 & 0{,}44 \end{pmatrix}$$

A relatív hiba tehát legfeljebb 10 százalék, és mind sor-, mind pedig oszlopirányban kiegyenlítődik. Az (**1** – **A** – **H**) mátrix kondíciószáma 10,2, az (**A** + **H**) mátrixé pedig 45. Ennek meglepő következményei vannak.

Azt tapasztaljuk ugyanis, hogy **A** inverze és (hibával együtt) mért értékének inverze még köszönő viszonyban sem áll egymással, ugyanis (mindenütt három értékes jegyre kerekítve a számításokat) a következő eredményeket kapjuk:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -4{,}44 & 5{,}56 \\ 5{,}56 & -4{,}44 \end{pmatrix} \qquad (\mathbf{A}+\mathbf{H})^{-1} = \begin{pmatrix} -24{,}4 & 25{,}6 \\ 25{,}6 & -24{,}4 \end{pmatrix}.$$

Ugyanakkor e mátrix pontos, valamint hibás értékének Leontief-inverze igen közel marad egymáshoz.

$$(1-\mathbf{A})^{-1} = \begin{pmatrix} 5{,}45 & 4{,}54 \\ 4{,}54 & 5{,}45 \end{pmatrix} \qquad (1-\mathbf{A}-\mathbf{H})^{-1} = \begin{pmatrix} 5{,}49 & 4{,}51 \\ 4{,}51 & 5{,}49 \end{pmatrix}.$$

Ez utóbbi szerint a 10 százalék körüli mérési hibája az inverz számításának kiegyenlítő jellege miatt 1 százalék alá csökken.

E meggondolkoztató példából fontos gyakorlati és ugyancsak lényeges elméleti következtetések adódnak. A legfőbb gyakorlati következmény az, hogy még egyszerűnek tűnő gazdasági számításokat sem szabad érzékenységi vizsgálatok nélkül elfogadni. Ha a számításban a kivonás és/vagy szorzás művelete szerepel, akkor az eredmény viszonylagos hibája könnyen végtelenné nő. Ilyenkor a lehetséges hibák vizsgálata nélkül az eredmény félrevezetővé válhat. Például pozitív helyett negatív, vagy pedig nagyságrendileg eltérő, tehát mindenképpen értelmetlen és használhatatlan.[14] E gyakorlati következtetés különösen megszívlelendő tapasztalati része az, hogy az esetleges szingularitás (zérussá válás)

[14] Ezt gyakran tapasztaltuk a külkereskedelmi vagy a fizetési mérleg közzétett egyenlegével és változásaival kapcsolatban. Néha még a változás előjele is kétségessé vált.

környezetében alaposan vizsgálandó a számítás menete, mert e helyek (akárcsak a kozmoszban található fekete lyukak) teljesen felborítják környezetük vélt „geometriáját”.

Az elméleti következtetés a gazdaságtan alapvető feladatát érinti. Ma nagyjából-egészében minden közgazdász elfogadja, hogy e feladat a szűkös erőforrások elosztása versengő célok közt. Annak megállapítása azonban, hogy mekkora termelést tesz lehetővé a szűkös erőforrások elosztása, nem lehetséges az **A** mátrix inverzének kiszámítása nélkül. A meg nem bízható inverz azonban itt (az olyan számításokban, amelyek a gazdaság egészének anyagcseréjét vizsgálják) éppen ennek a feladatnak a megoldását szolgálja. Azt mondja meg, hogy ha ismerjük a termékek valamilyen készletét, akkor abból mekkora termelés valósítható meg. Ha pedig erre a kérdésre a fenti körülmények miatt nem adható megbízható válasz, akkor nyilván helyes magát a kérdést másként feltenni. Amennyire világos ugyanis a válasz arra, hogy valamely kívánt termékkosár előállítása milyen ráfordításokat kíván az adott helyen és időben az ugyancsak adott technika figyelembevételével, annyira bizonytalanná válik a válasz a fordított irányban feltett kérdésre, amikor meglévő készletből indulunk ki a termelési lehetőségek meghatározására.

A fenti érvelés ellen azt lehet felhozni, hogy nem egyszerűen a szűkös források elosztása, hanem optimális elosztása a feladat, és ezt a modern gazdaságtan ma a lineáris (vagy a hibákra még érzékenyebb nemlineáris) programozással oldja meg. Csakhogy ennek megoldásában ismét a korábbihoz hasonló mátrix inverze játszik szerepet. A programozás eredményének érzékenységét ezért ugyanígy kellene vizsgálni. De ez ritkán, vagy sohasem történik meg, holott a fentinél még nagyobb veszélyre mutatna rá. Az input-output számítás eredménye a kiinduló adatok változásának folytonos függvénye. A programozás eredménye azonban hirtelen ugrással válaszolhat a kiinduló adatok kis változására is. A pontos, illetve a közeli, „szomszédos” megoldás teljesen más eljárásokat választhat, vagyis más technikai megoldások együttesét teszi optimálissá. Ilyenkor azonban a számítógéptől kapott válasz már nem hasznos. Ez esetben ugyanis még minőségileg is félrevezetővé válhat, tehát teljesen más eljárásokat választhat ki optimálisként, mint amit a hibátlan (vagy kevésbé hibás) adatokból végzett számítás kijelölne.

## Gyakorlati számítások

A kutatás korábbi szakasza a keynesi (összevont) multiplikátor elméletét és értékét, valamint annak ágazati eltéréseit vizsgálta (*Bródy* [2005]). Ott már feltűnt, hogy az összevont multiplikátor értéke nagy pontossággal megállapítható, bár az ágazati értékek nagyon eltérnek ettől az átlagos értéktől, és csak első értékes jegyük az igazán megbízható. Ezeket a sajátosságokat itt részletesebben vizsgáljuk a 2000. évi magyar mérleg folyó ráfordításait tartalmazó **A** mátrix adatainak segítségével.[15]

A folyó ráfordítási mátrix együtthatóit a KSH 6 tizedesre kerekítve közölte. A pontosság azonban nyilván nem vonatkozik mind a hat tizedes jegyre. Ez a nagyfokú precízió csupán a gépi osztás végtelen folytathatóságának látszatából ered. Biztosan nem jelenti azt, hogy az adatokat közlő statisztikus az együtthatókat milliomodrésznyire pontosnak véli. Ha óvatosak akarunk lenni, akkor a mért érték egy és három százaléka közt lévő hibakorlátot választhatunk. Helyes tehát azt megvizsgálni: hogyan és mennyiben változik az inverz legnagyobb és pozitív sajátértéke (az összevont multiplikátor), ha a számítás kiinduló adatait nem teljes egészükben, hanem csak rövidítve, csonkítva használjuk fel.

[15] Ezek az adatok, ahogyan azt idézett publikációm leírta, a KSH úttörő publikációjából származnak, s itt elsősorban azzal kísérletezem, hogy hány tizedes jegyre kell az együtthatókat kiszámítani, hogy a célszerű pontosságot elérjük.

Ekkor esetenként változó számú jegyet tekintünk megbízhatónak. Ha például csak 5, 4, 3, 2 tizedesre vagy pedig csak az első két értékes jegyre kerekítjük az együtthatókat, s ebből indulunk ki a számításban, akkor ez azt jelenti, hogy megvizsgáltuk, befolyásolhatják-e a pontosan nem mérhető és ezért elhagyott további jegyek a számítás végső értékét. Ha csak az első két számjegyet használjuk fel az eredmény megállapítására, akkor azt feltételezzük, hogy az együtthatónak csak ezek a számjegyei megbízhatók. Ez tíz százaléknál nem nagyobb bizonytalanság feltételezését jelenti. (Ami már nemcsak óvatos, de nagyon is kétkedő és konzervatív becslés.)

Az *1. táblázat* ezért a multiplikátor így kiszámított, egymástól kissé eltérő értékeit négy tizedes jegyre kerekítve mutatja be. Nem azért, mintha a gazdasági életben a multiplikátor egész számnál és (talán) egy tizedes jegyénél nagyobb pontosságára volna szükség, illetve pedig ennél többet kellene vagy lehetne gyakorlatilag figyelembe venni. Csak azért kell a több számjegy, hogy a számítás tényleges és meglepően nagyfokú biztonsága világossá váljon.

*1. táblázat*

A 2000. évi inverz legnagyobb sajátértéke

| Tizedes jegy | Multiplikátor |
|---|---|
| 6 | 7,3963 |
| 5 | 7,3862 |
| 4 | 7,3981 |
| 3 | 7,3608 |
| 2 | 7,3737 |
| 2 értékes | 7,3488 |
| 3 értékes | 7,3955 |

A multiplikátor egy tizedesre kerekített értéke még a puszta 2 tizedes jegyre kerekített adathalmazból számítva is 7,4. Ha e helyett 2 értékes jeggyel számolunk, akkor valamivel kisebb (az eltérés 6 ezred), de 3 értékes hely számbavétele esetén ismét pontos. Az eredmény tehát minden feltüntetett kerekítés és csonkítás mellett lényegében azonosnak bizonyult.

A mátrix sajátértékének nagysága számítható a Raleigh–Aitken-hányadossal, valamint az úgynevezett Mises-féle iterációval is.[16] A sajátvektorok első közelítésének a mátrix oszlop-, illetve sorösszegeit tekinthetjük. Ezekkel újabb és újabb szorzást végezve, tehát „iterálva” sorra kapjuk az **A** mátrix 0,8648 nagyságú legnagyobb sajátértékét egyre jobban megközelítő *2. táblázatbeli* arányossági tényezőket.

A konvergencia mindkét esetben elég gyors, habár a szubdomináns sajátérték itt sokkal nagyobb a vártnál, jóval több mint fele a legnagyobb sajátértéknek. Értéke 0,5835. Ez arra utal, hogy az iteráció egy-egy lépése csak mintegy felezi a hibát. A Raleigh–Aitken-hányados azonban még ebben az esetben is, már első ismétlése után is a gyakorlat számára kielégítő és használható értéket ad.

Van-e összefüggés az iteráció tapasztalt gyorsasága és a modell (nemcsak a megválasztott számítási eljárás) hibajavító képessége, azaz a hibák hatásának viszonylag csekély

[16] Ez az egyetlen oldalról történő iteráció is gyorsan közelíti a pozitív (vagy nemnegatív) mátrixok mindig domináló legnagyobb sajátértékét. A sajátérték itt az a „normalizáló” faktor, amely a $\mathbf{p}'_k \mathbf{A} = \mathbf{p}'_{k+1}$ iterációk során helyreállítja a **p** vektor normáját (például pozitív elemeinek összegét vagy valamely kiválasztott elemének – legtöbbször a bérrátának – nagyságát).

*2. táblázat*

A Raleigh–Aitken-hányados, illetve a Mises-iteráció

| Raleigh–Aitken-hányados | Mises-iteráció |
|---|---|
| 0,8623 | 0,8819 |
| 0,8647 | 0,8686 |
| 0,8649 | 0,8652 |
| 0,8648 | 0,8644 |
| 0,8648 | 0,8648 |
| 0,8648 | 0,8648 |

volta közt? Nem tudom ezt szabatos matematikai formában megválaszolni, de az adatokkal dolgozva, bizonyos nagyságrendi és formai érvek kialakultak bennem. Úgy látom: a mérés hibái nem abból állnak, hogy a mátrix struktúráját, az ágazatok fontos és kevéssé fontos kapcsolatait félreismerjük vagy összekeverjük. Csupán az történhet meg, hogy az egyes ráfordításokat – a mi esetünkben: a 22 sorban és 22 oszlopban álló 484 együtthatót, amelyek átlagos nagysága a 3 és 4 százalék közt van – nem mérjük meg elég pontosan. Amíg azonban ez a mérési pontatlanság nem haladja meg a harmadik tizedes jegyből (tehát az ezrelékes nagyságból) vett kerekítés nagyságát, addig az átlagos ágazati multiplikátor (tehát az inverz) vagy maga az eredeti mátrix legnagyobb sajátértékének becslése három számjegyre pontos marad. Azok az 5 ezrelékes eltérések, amelyek a mért viszonylagos ráfordítás harmadik jegyében történtek meg, legfeljebb 1 ezreléknyi, tehát ötödrésznyi viszonylagos eltérést okoznak a számított értékben. A további helyértékeken álló számjegyek iránt pedig a számítás teljesen közömbös. Ezekre a helyekre tehát bármit vagy éppen semmit írhatunk. Ez persze annak köszönhető, hogy a mérési hibák egyformán lehetnek pozitívak és negatívak, tehát bizonyos mértékig kiegyenlítik egymást a további számítás folyamán.

Maga ez a kiegyenlítődés annak az eredménye, hogy az elkövetett a hibák nem teljesen függetlenek egymástól: ha valahol többet számolunk el, mondjuk a felhasznált energiából, akkor egy másik ágazatra kevesebb jut. Ha egy adott ágazat valamelyik költségtényezőjét felfelé torzítjuk, akkor – mivel az összes költséget általában jobban ismerjük, és valamivel pontosabban is mérjük a részleteknél – alighanem másutt a másik irányban tévedünk. Azt a tapasztalatot is szeretném itt ehhez hozzáfűzni, hogy minél nagyobb a mátrix, annál kedvezőbben alakul hibajavító, hibaelsimító hatása. Ez már azzal támasztható alá, hogy a 30 szektoros nagyságrend felett érezhetővé válik a nagy számok törvényének hatása. Ezért akkor már feltehetjük, hogy a hibák zérus várható értékű és jól becsülhető szórású normális eloszlású valószínűségi eloszlásból vett mintának tekinthetők.

## Következtetések

A két legfontosabb elméleti eredményt kiemelve és értelmezve, a következőket mondhatjuk.

1. A folyó ráfordítási együttható mátrixából számított minden sajátérték – ezek meghatározása és megalkotásuknak előírt rendszere szerint – *mértékfüggetlen*. Ez azt jelenti, hogy a sajátértékek szabatosan kiszámíthatók, nem függenek a mértékegységek megválasztásától. A mértékek rendszerének megváltoztatását leíró hasonlósági transzformáció a sajátértékekhez tartozó sajátvektorokat a koordináták bármely kívánt vagy megadott rendszerébe át tudja vinni.

Mint a természeti tudományokban, a gazdaságtanban sem létezik a koordináták (mértékegységek) abszolút rendszere. A mértékegységek megállapítása mindkét tudományban megegyezés kérdése. Helyes tehát a gazdaságtanban is változatlan arányokat keresni az elmélet alapjául. Ilyen a korszakos növekedési ráta, a hatásfok és a főbb ciklusok hossza. Ezek sajátértékek. Lényegükben az emberi gazdálkodás biológiailag és fizikailag adott tartamaihoz köthető, konstans vagy pedig csak igen lassan módosuló nagyságok. Ugyancsak logikus az a kívánság, hogy a mértékek rendszerének, a pénzlábnak és az áruk szokásos mértékegységeinek változása ne legyen hatással a gazdasági tételek érdemi megállapításaira. Ennek logikus következménye, hogy a gazdaság mérése is sajátértékek és sajátvektorok szerepére és jelentésére épüljön.

2. A Leontief-inverz domináns diagonálisa miatt *jól kondicionált.* Az inverzió elvégzése növeli a szükséges és megbízható információ arányát. Ugyanakkor zsugorítja és kiegyenlíti a mindig eltérésekkel és hibákkal járó mérés zavaró hatásait. Ez annak következménye, hogy a folyó ráfordítási együtthatók **A** mátrixának legnagyobb és pozitív sajátértékéhez tartozó, valamint a legtöbb információt hordozó pozitív diád súlya az inverzió során növekszik. Éppen ezért válik ez a domináns diáddá, míg a többi diád viszonylagos, és abszolút hatása egyaránt valamelyest csökken.

Leontief ezzel módosította és új módon fogalmazta meg a gazdaságtan egyik alapvető kérdésfeltevését. Nem arra válaszolt, hogy adatván a többlettermék egy bizonyos halmaza, abból mit lehet előállítani, tehát hogyan lehet vagy kell elosztani a szűkös javakat. Ez a kérdés rossz, mert jellegzetesen bizonytalan válaszokhoz vezet. Ehelyett azt kutatta, hogy adott és kívánt többlettermék *(final bill of goods)* hogyan állítható elő adott körülmények közt. Ezzel lehetővé teszi azt, hogy a gazdaságtan az instabil növekedésmaximálás helyett helyesen határozza meg a stabil, bár ciklikus növekedés során felmerülő szükségleteket. Leontief tehát, bár ezt csak közvetve említi a bővített újratermelés modelljének felállítása kapcsán, felismerte a gazdaság menetének irreverzibilis voltát, és így túllépett a gazdaságtan főáramának mechanikus és reverzibilis felfogásán.

Ugyanakkor le kell vonni két gyakorlati következtetést is. Az első az, hogy a megfelelő perturbációs számítások elvégzése nélkül általában nem ítélhetők meg az eredmények. A hibaszámítás elvégzése azért is ajánlatos, mert rámutat, hogy a megkövetelhető tolerancia a számítás menetében csökken-e, vagy növekszik, és mennyire. A második következtetés az, hogy minden modell feltételezéseken alapul, és ezeknek a feltételeknek az elvégzett mérések és kapott adatok nem mindig tesznek eleget. A modell feltevéseinek megváltoztatása, például zártabb vagy részletesebb modell felépítése, esetleg más – például statikus helyett dinamikus – szemlélet alkalmazása vagy a ciklusok figyelembevétele is eltérést okoz az eredményben. Ez az eltérés azonban már nem tekinthető szorosan vett hibának, hiszen ekkor a számítási eredmények már másképpen felvetett kérdésekre válaszolnak.

## *Hivatkozások*

Augusztinovics Mária [1996]: Miről szól az input-output számítás. Kögazdasági Szemle, 4. sz. 316. o.

Bródy András [1964]: Az ágazati kapcsolatok modellje. A felhasznált absztrakciók korlátai és a számítások pontossága. Akadémiai Kiadó, Budapest.

Bródy András [2005]: A multiplikátor és története. Közgazdasági Szemle, 4. sz. 402–416. o.

Jánossy Ferenc [1963]: A gazdasági fejlettség mérhetősége és új mérési módszere. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.

MOLNÁR GYÖRGY–SIMONOVITS ANDRÁS [1998]: Nagy sztochasztikus mátrixok szubdomináns saját-értéke. Szigma, 33. 1–6. o.
MORGENSTERN, O. [1952]: Über die Genauigkeit wirtschaftlicher Beobachtungen. Einzelschriften der Deutschen Statistischen Gessellschaft, Nr. 4. München.
NEUMANN, J.–GOLDSTINE, H. [1947]: Numerical inverting of matrices of high order. Bulletin of the American Mathematical Society, 53. 1621–1699. o.
NEUMANN, J.–GOLDSTINE, H. [1951]: Numerical Inverting of Matrices of High Order, II. Proceedings of the American Mathematical Society, 2. 188–202. o.
SIMONOVITS ANDRÁS [1969]: Pozitív mátrixok Raleigh-hányadosáról. Szigma, 2. 76–78. o.
SIMONOVITS ANDRÁS [1975]: A note on the underestimation and overestimation of the Leontief inverse. Econometrica, Vol. 43. No. 3. 493–498. o.
STEEDMAN, I. [2003]: On 'measuring' knowledge in new (endogeneous) growth theory. Megjelent: *Salvadori, N.* (szerk.): Old and New Growth theories. Edward Elgar, Cheltenham, 127–133. o.
WILKINSON, J. H. [1965]: The algebraic eigenvalue problem. Clarendon Press, Oxford.