

ALÁCS PÉTER

## Optimális loglineáris nyugdíjösztönzés megoldása numerikus módszerrel

---

A cikk a közgazdaságtani modellek numerikus megoldásai során felmerülő olyan kérdéseket taglalja, mint a hatékonyság, pontosság, hibaanalízis, stabilitás és megbízhatóság. A cikk nem vállalkozik arra, hogy teljes körű képet adjon az alkalmazható numerikus módszerekről, ezek előnyeiről és hátrányairól, inkább egy matematikai struktúráját tekintve bonyolult, közgazdaságtanilag érdekes és numerikus szempontból a fenti kérdések vizsgálatára alkalmas nyugdíjösztönzési modellt vesz górcső alá. Végül a numerikus módszerek hatékonyságát egy fontos közgazdaságtani sejtés demonstrálásával mutatja be.\*

Journal of Economic Literature (JEL) kód: C88, D60, H55.

---

Amikor egy közgazdaságtani modell vizsgálatakor analitikus nehézségekbe ütközünk, célszerűnek tűnhet a probléma numerikus vizsgálata. Ekkor azzal a természetes igénnyel találkozunk, amellyel minden új probléma tárgyalásakor: meg akarunk győződni feltételezéseink és a modell elméleti alapjainak összhangjáról, minél gyorsabban, minél több információt szeretnénk megtudni a modell jellegzetességeiről, működéséről. Még egyszerűbb modellek esetében is, amikor a probléma átlátható és analitikusan könnyen kezelhető, első dolgunk néhány egyszerűbb alapeset vizsgálata, amellyel gyorsan ellenőrizhetjük, hogy az adott modell illeszkedik-e a közgazdaságtani problémáról bennünk eddig kialakult képpel. Valójában a numerikus vizsgálatok ezt az első ismerkedést hivatottak hatékonyan támogatni, elsősorban olyan problémák esetében, amelyek analitikusan már nehezen kezelhetők.

Numerikus módszereket ma már igen sok általános célú program ismer, a matematikai programcsomagoktól a táblázatkezelőkig. Annak ellenére, hogy ezek kipróbált és bevált algoritmusokat alkalmaznak, használatuknál mégis óvatosan kell eljárni. A fokozott óvatosságot két ténnyel tudjuk indokolni. Először is, a numerikus matematika kimondott igazsága, hogy bizonyos problémák esetében nincs általános célú legjobb algoritmus; a legjobb algoritmust mindig a speciális problémához kell megválasztani, figyelembe véve a problémáról összes eddig nyert információt és a rendelkezésre álló számítástechnikai erőforrásokat. Másodsorban, elkerülhetetlen, hogy ne jelentkezzen valamekkora numerikus hiba, egyrészt a numerikus számábrázolás miatt (a valós számok csak véges pontossággal vannak ábrázolva), másrészt az iteratív eljárások miatt (csak véges számú ciklus futtatható le). Az eredményekben jelentkező numerikus hiba, vagyis a numerikus eljárással kapott és az igazi (analitikus) érték eltérése, illetve a számítási pontosság közötti kapcsolat általában csak közvetett, így az eredmények adott pontosságú kiszámításához

\* Köszönettel tartozom *Simonovits Andrásnak* a cikk megírásához nyújtott nélkülözhetetlen és kitartó támogatásáért.

*Alács Péter* ELTE TTK.

további vizsgálatokra, a numerikus módszereket és a matematikai analízist is magában foglaló hibaanalízist kell elvégezni.

A megfelelően megválasztott numerikus módszer és a hibaanalízis együttesen képesek lehetnek megfelelően támogatni a modellépítést. Különösen akkor, amikor a modell egyes részei még nem tisztázottak, több hipotézist és minden hipotézist több konfiguráció vagy kezdőfeltétel esetén kell megoldanunk, csak egy hatékony modellre számíthatunk. Ugyanakkor világos az is, hogy az eredmények értelmezésekor ismernünk kell azt, hogy az egyes esetek eredményváltozói közötti eltérések hordoznak-e magukban közgazdasági tartalmat, vagy csak a numerikus eljárásból adódnak.

Nem közgazdaságtani elemzést vagy egy modellt kívánunk tehát bemutatni, hanem elsősorban a modellépítés azon szakaszát, amelyben a numerikus módszerek segítségünkre lehetnek. Természetesen ezt úgy tudjuk a legegyszerűbben megtenni, ha választunk egy alkalmas közgazdaságtani modellt, amelynek numerikus megoldása során egyaránt rámutathatunk a numerikus módszerek előnyeire és veszélyeire is. A közgazdaságtanban ilyennek tekinthetők például az aszimmetrikus információ jelenségét taglaló modellek, amelyekben az információval rendelkező szereplő (optimális) választásától függ az információval nem rendelkező szereplő választása, vagyis ahol két optimumszámítás egymásra épül. Ezekben a modellekben nem feltétlenül választható olyan megfelelő matematikai apparátus, amellyel az optimális választások analitikusan könnyen kezelhetők (Salanié [1994]), de a modell numerikus megvalósításakor az optimumszámítások egymásra épülése miatt a hibák összeadódnak, a kevésbé hatékony numerikus algoritmusokat alkalmazva pedig az eljárás túlon túl lelassulhat.

A következőkben bemutatunk egy nyugdíjösztönzési modellt, amely tartalmazza a nyugdíjrendszer résztvevői és a rendszer tervezője közötti információs aszimmetria jelenségét, egyúttal rámutatunk a probléma közgazdaságtani oldalaira is. Mielőtt numerikusan megoldanánk a modellt, röviden ismertetjük a hasonló problémák numerikus megoldása során alkalmazható módszereket, majd bemutatunk egy lehetséges, hatékony numerikus módszert a felvetett nyugdíjösztönzési modell megoldására. Végül a numerikus módszerek hasznosságát demonstrálандó, „bebizonyítunk” egy a nyugdíjösztönzési probléma kulcskérdései közé tartozó sejtést.

### Egy nyugdíjösztönzési modell

Az öregségi nyugdíj rendszerének (a továbbiakban egyszerűen csak nyugdíjrendszerek) elsődleges feladata, hogy az aktív, munkával töltött életszakasz lezárásával, méltányos inaktív, időskori megélhetést biztosítson. A nyugdíjrendszerek azonban mind finanszírozásuk, mind más belső szabályrendszerüket tekintve igen összetettek lehetnek, így előnyös lehet néhány egyszerűsítő feltevés mellett modelleken keresztül vizsgálni a működésüket (Simonovits [2002]). A modellek feltételezéseit természetesen a vizsgálni kívánt jelenség természete határozza meg. Simonovits [2003] azt a kérdést vizsgálja, hogy a folyamatosan javuló életkilátások (növekvő várható élettartam) és az egyének differenciált munkához, illetve a nyugdíjazáshoz való viszonya milyen hatással van a járulékformulára. A megfelelően egyszerűsített modell kimutatta, hogy a járulékformulát tompítani kell a világ több országában már alkalmazott úgynevezett naiv vagy biztosításmatematikailag korrekt formulához képest. A következőkben röviden ismertetjük a szóban forgó modellt és annak közgazdaságtani hátterét.

A nyugdíjbiztosítás egyik alapelve, hogy a járulékok és járadékok várható jelenértékének meg kell egyeznie egymással (szolvencia). A nyugdíjformula, amely megállapítja, hogy az egyén nyugdíjazásakor mekkora járandóságra jogosult, figyelembe veszi az egyén

befizetéseit. Naivan, a szolvencia elvét az egyén szintjén alkalmazva, a nyugdíjformulának (durván) az egyéni befizetések és a várható hátralévő életszakasz hosszának hányadosával kell megegyeznie. Ennek a naiv formulának alapjául szolgáló feltevéseket bírálatok érték (Waldron [2001]), mert a megfigyelések szerint a hosszabb életűek tovább is dolgoznak, így a rendszer pénzügyi egyensúlya felborulhat. Másrészt ez a megfigyelés elvi problémákat is felvet. Ha ugyanis az egyének szolgálati ideje és élethossza között pozitív a korreláció, az arra utal, hogy az egyének információja lehet a saját élethosszáról, amelyet felhasznál a nyugdíjba vonulásának időpontjának megválasztásakor. Az elmélet oldaláról, mint arra Diamond–Mirrlees [1978] rámutattak, több más közgazdasági problémához hasonlóan (ezekről összefoglalásul lásd Gömöri [2001]) ebben az esetben is fellép az információs aszimmetria.

Olyan rendszerek esetében, amelyekben az aszimmetrikus információ jelentkezik, a modern közgazdaságtan a mechanizmustervezés eszköztárát tartja irányadónak. Az aszimmetrikus információ miatt a társadalmi jóléti függvény szokásos költségvetési mellékfeltétel melletti optimalizálása helyett (amit itt első legjobbnak neveznek), a mellékfeltételekhez hozzáveszik az egyéni hasznosságfüggvények maximalizálásának feltételét is (így kapjuk a második legjobbnak nevezett optimumot).

Simonovits [2003] alapján, a modellben az alábbi egyszerűsítésekkel élünk:

F1. Minden demográfiai paramétert állandónak és az egyén szempontjából is determinisztikusnak veszünk. Így tehát stacioner népességgel számolunk, ahol a keresztmetszeti és kohorszmenyiségek megegyeznek, továbbá a halálozási valószínűségeket minden egyén esetében egyetlen időpontra koncentráltak ( $D$ ).

F2. Az egyén életpályáját is egyszerűsítve vizsgáljuk: két életszakasszal, az aktív és a nyugdíjas életszakasszal foglalkozunk. Az aktív szakaszban, amely a munkába lépéstől (a modellben 0 kor) a nyugdíjba vonulás időpontjáig ( $R$ ) tart, az egyén a keresetének egy meghatározott hányadát ( $\tau$ ) befizeti a nyugdíjrendszerbe, maradék keresetét pedig teljes egészében fogyasztásra költi. A nyugdíjas szakaszban az egyén nem dolgozik és ( $b$ ) nyugdíjat kap.

F3. Minden gazdasági változót konstansnak tételezünk fel. Minden egyén keresete egységnyi.

Láthatjuk, hogy a modellben élesen elkülönül az életpálya aktív és nyugdíjas szakasza. Ennek megfelelően legyen az  $\varepsilon$  fogyasztási rugalmassággal rendelkező aktív szakaszban élő egyén hasznosságfüggvénye  $u(\varepsilon, a)$ , ha fogyasztása  $a$ , a nyugdíjas szakaszban élő egyén hasznosságfüggvénye pedig  $v(\varepsilon, b)$ , ha nyugdíja  $b$ . Írjuk az egyéni életpálya hasznosságfüggvényét és költségvetési feltételt autarkia esetén:

$$U(D, \varepsilon, \tau, b, R) = u(\varepsilon, 1 - \tau)R + v(\varepsilon, b)(D - R) \quad \text{és} \quad z = \tau R - b(D - R).$$

Az optimum feltételére ekkor a következő adódik:

$$\partial_R U = u(\varepsilon, 1 - \tau) - v(\varepsilon, b) + \frac{\tau D}{D - R} \partial_b v(\varepsilon, b)$$

$$\partial_\tau U = -\partial_a u(\varepsilon, 1 - \tau)R + \partial_b v(\varepsilon, b)R,$$

ahol a második egyenletben kihasználtuk a  $z = 0$  költségvetési feltételből kapott  $b$  és  $\tau$  közötti összefüggést. Továbbhaladva az általános mechanizmustervezés módszerének logikai fonálán, most írjuk fel a társadalmi jóléti függvényt, és a teljes nyugdíjrendszer költségvetési egyenlegét:

$$V(\tau, b) = \int \varphi(U^*(D, \varepsilon, \tau, b)) dF(D, \varepsilon)$$

$$Z(\tau, b) = \int [\tau R_{D,\varepsilon} - b_{R_{D,\varepsilon}}(D - R_{D,\varepsilon})] dF(D, \varepsilon) = 0.$$

Ezen a ponton kell eldöntenünk, hogy milyen nyugdíjformulát alkalmazunk, pontosabban: azt kell meghatározni, hogy milyen függvénycsaládban keressük a  $V(\tau, b)$  társadalmi jólétet maximalizáló  $b_{\alpha}(R)$  függvényt. Most kis mértékben eltérünk *Simonovits* [2002] levezetésétől, mert a következő alfejezetben bemutatott számítások során – technikai okokból – nemlineáris, hanem az exponenciális

$$b_{\gamma,\varepsilon}(R) = \gamma \exp(\rho R)$$

formulát alkalmazunk. Most megadjuk az exponenciális nyugdíjformula esetén a társadalmi jóléti függvény optimumának feltételét:

$$0 = \int dF(D, \varepsilon) \left\{ \varphi' \begin{pmatrix} -u'R \\ v'b(D-R) \\ v'bR(D-R) \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} R \\ -\frac{b}{\gamma}(D-R) \\ -bR(D-R) \end{pmatrix} - \right. \\ \left. \mu \frac{\tau - \rho b(D-R) + b}{(v''b + v')b\rho^2(D-R) - 2v'\rho b} \begin{pmatrix} -u' \\ \frac{\rho}{\gamma}(v''b + v')b(D-R) - \frac{b}{\gamma}v' \\ (v''b + v')b\rho R(D-R) + v'b(D-2R) \end{pmatrix} \right\}'$$

ahol most  $u'$ -vel és  $v'$ -vel jelöltük a megfelelő függvények  $a$ , illetve  $b$  szerinti parciálisderiváltjait. A fenti modell alkalmazásának fontos speciális esete, amikor a CRRRA (állandó relatív kockázatkerülési együtthatójú, *Constant Relative Risk Aversion*) hasznosságfüggvényeket a következőképpen használjuk. Jellemezze az egyént egy  $(\sigma, \varepsilon)$  pár, ahol  $\sigma \leq 1$ ,  $\varepsilon \in [0; 1]$  és  $1/(1 - \sigma)$  az időbeli helyettesítés rugalmassága,  $\varepsilon$  pedig a pillanatnyi hasznosság fogyasztás szerinti rugalmassága. Feltesszük, hogy az egyén vagy a minimális vagy a maximális szabadidőt választhatja, és ezek hányadosa  $\lambda \in [0; 1]$ . Így a hasznosságfüggvény a

$$U = \frac{1}{\sigma} [\lambda^{(1-\varepsilon)\sigma} (1 - \tau)^{\varepsilon\sigma} R + b^{\varepsilon\sigma} (D - R)] \quad (1)$$

alakban írható fel. A további számítások során azzal a feltevéssel élünk még, hogy minden egyént azonos időbeli helyettesítés rugalmassága ( $\sigma$ ) jellemez. Ezt a feltételezést elsősorban azért gondoljuk jogosnak, mert a modellben az élettartam két általunk vizsgált szakaszán a fogyasztás eleve konstans, így a fogyasztási pálya kiegyenlítetttsége – az egyén szempontjából – lényegében csak  $R$  megválasztásával módosítható, erre pedig sokkal erősebb hatással van  $\varepsilon$ , a hasznosság fogyasztás szerinti rugalmassága. Így tehát azt állítjuk, hogy az egyének  $\sigma$ -ban megmutatózó különbözősége a modellben csak másodlagos hatásként jelentkezhet, így – törekedve a modell egyszerűsége révén elérni kívánt átláthatóságra – ezt a hatást elhanyagoljuk. A fenti érvelés könnyebben érthetővé válik, ha kicsit részletesebben megvizsgáljuk az (1) összefüggésben megadott CRRRA hasznosságfüggvénnyel felírt modell autark optimumát.

A következő alfejezetben szükségünk lesz az (1) összefüggésben definiált egyén autark optimumára. Ennek jelentősége különösen abban áll, hogy egzakt módon megoldható, ami a nyugdíjrendszerben részt vevő, különböző preferenciájú egyént magában foglaló modell esetén lehetetlen. Külön nyugdíjformulára ebben az esetben nincs szükség, hiszen a  $z = 0$  költségvetési feltétel ez esetben automatikusan visszaadja a naiv ösztönzés formuláját, vagyis:

$$b(R) = \tau \frac{R}{D - R},$$

amit visszahelyettesítünk az (1)-be:

$$\sigma U = \lambda^{(1-\varepsilon)\sigma} (1 - \tau)^{\varepsilon\sigma} R + \left( \frac{\tau R}{D - R} \right)^{\varepsilon\sigma} (D - R).$$

Ezután  $U$ ,  $\tau$  és  $R$  szerinti deriváltjai adják az autark optimum feltételeit:

$$\frac{R}{D} = \frac{\varepsilon\sigma}{1 - \eta} \quad \tau = \frac{\frac{\varepsilon\sigma}{1 - \eta} - 1}{\varepsilon\sigma - 1}, \tag{2}$$

ahol  $\eta = \lambda^{\frac{(1-\varepsilon)\sigma}{\varepsilon\sigma - 1}}$ .

Ha feltesszük, hogy autark esetben az egyén nem dolgozik élete végéig (a modellben az egyén ismeri saját élettartamát), akkor a (2) alapján  $\varepsilon$  paraméter 0, és az

$$\frac{R}{D} = \frac{\varepsilon\sigma}{1 - \lambda^{\frac{(1-\varepsilon)\sigma}{\varepsilon\sigma - 1}}} = 1$$

egyenlet  $\varepsilon_{\max}$  megoldása között kell hogy legyen. Egzakt alakban  $\varepsilon_{\max}$  a  $x \mapsto x e^x$  függvény  $\mathcal{W}$ -vel jelölt inverzével fejezhető ki:

$$\varepsilon_{\max} = \frac{1}{\sigma} \left( 1 - \frac{\sigma - 1}{\mathcal{W}(\frac{\sigma - 1}{\lambda} \ln \lambda)} \ln \lambda \right). \tag{3}$$

A (2) egyenletekből láthatjuk, hogy a nagyobb  $\varepsilon$  értékekhez nagyobb relatív szolgálati idő tartozik, így tulajdonképpen az  $\varepsilon$ -t egyszerűen az egyén „szorgalmára” jellemző paraméternek is tekinthetnénk. Ez a kifejezés azonban nem fejezi ki megfelelően  $\varepsilon$  szerepét a modellben. Nyilvánvaló, hogy adott rendszer esetén  $\varepsilon$ -ra csak az  $R/D$  hányadosok összehasonlítása alapján következtethetnénk, de a különböző  $\sigma$  és  $\lambda$  paraméterek esetében kapott különböző  $\varepsilon_{\max}$  értékekből azt a tanulságot kell levonnunk, hogy az  $\varepsilon$ -ok nem összehasonlíthatók, így önmagukban semmilyen tulajdonság vagy állapot mérőszámai sem lehetnek. Ennek ellenére, a modell elemzésekor, ha ez különösebb félreértést nem okoz, az egyszerűbb szóhasználat miatt gyakran a „szorgalmasság” kifejezéssel utalunk  $\varepsilon$  értékeire (bár a fogalmat továbbra sem azonosítjuk vele).

A fentiek alapján az általános modellünket az alábbi konkrét matematikai formába öntjük. Legyen adott  $n$  természetes szám,  $(f_i, \varepsilon_i, D_i)_{i=1..n}$ ,  $\lambda$  és  $\sigma$  paraméterek, a már bemutatott jelentéstartalommal. Mi lesz ekkor a következő probléma  $(R_i)_{i=1..n}$ ,  $\tau$  és  $\alpha$  megoldása, amely a mechanizmustervezés elméleti megfontolásai alapján, második legjobb optimum, és ahol  $\alpha$  egy megfelelően megválasztott nyugdíjösztönzési formula paramétereit jelöli? A nyugdíjösztönzési formulát mi az

$$b_{\gamma,e}(R) = \gamma \exp(\rho R) \tag{4}$$

alakban keressük. Az utilitarista megközelítést követjük, így a társadalmi jóléti függvény

$$V = \sum_{i=1}^n f_i \frac{1}{\sigma} \left[ \lambda^{(1-\varepsilon_i)\sigma} (1 - \tau)^{\varepsilon_i\sigma} R_i + (\gamma e^{\rho R_i})^{\varepsilon_i\sigma} (D_i - R_i) \right] \tag{5}$$

alakban írható. Az utilitarista megközelítés mellett használjuk a Rawls-féle megközelítést is, amelynek alapján a társadalmi jóléti függvény a következő:

$$V = \min_i \left\{ \frac{1}{\sigma} \left[ \lambda^{(1-\varepsilon_i)\sigma} (1-\tau)^{\varepsilon_i\sigma} R_i + (\gamma e^{\rho R_i})^{\varepsilon_i\sigma} (D_i - R_i) \right] \right\}. \quad (6)$$

Az egyén, adott  $\tau$  járulékkulcs és nyugdíjformula ( $\gamma$  és  $\rho$ ) esetén, ismerve saját preferenciáit és élettartamát, optimalizálja egyéni hasznosságát:

$$\frac{\partial U_i}{\partial R_i} = \frac{1}{\sigma} \left[ \lambda^{(1-\varepsilon_i)\sigma} (1-\tau)^{\varepsilon_i\sigma} + (\varepsilon_i \rho (D_i - R_i) - 1) (\gamma e^{\rho R_i})^{\varepsilon_i\sigma} \right] = 0. \quad (7)$$

Mindemellett teljesülnie kell a feltétel költségvetési feltételnek, ami most a következő alakú:

$$Z = \sum_{i=1}^n f_i [R_i \tau - \gamma e^{\rho R_i} (D_i - R_i)] = 0. \quad (8)$$

### A numerikus módszerek alkalmazásáról

A numerikus módszerek nem csodaszerek. Nem adnak teljes körű információt a problémáról, hiszen csak *ad hoc* vizsgálatokra alkalmasak. Ráadásul alkalmazásuk a probléma matematikai megfogalmazásának vizsgálatát is igényli, mert az azonos típusú matematikai feladatok esetén a feladatról rendelkezésünkre álló további információ befolyásolja a numerikus módszerek közötti választást (*Stoyan–Takó* [1993]). Az előbbire, az elméleti problémák numerikus vizsgálatainak teljesítőképességére A modell numerikus megoldása című alfejezetben még visszatérünk, az utóbbi észrevétel fontosságát pedig a következőkben, az egyváltozós nemlineáris egyenletek numerikus megoldási módszereinek összehasonlításával kívánjuk szemléltetni.

Legyen adott egy  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvény,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $b > a$ . Keressük meg  $f$  zérushelyeit numerikusan az  $[a, b]$  intervallumban!

A fenti feladat a számítógép számára azonban értelmezhetetlen: a számítógép ugyanis *nem* ismeri a valós számokat. A számítógép a számokat a ráfordított memória nagyságának függvényében adott pontossággal tudja ábrázolni. Gyakorlatilag azonban, amikor numerikus megoldást alkalmazunk, nem is vagyunk kíváncsiak a matematikai értelemben vett pontos megoldásra, hanem csak egy (ehhez minél közelebbi) számra. Általában igaz az, hogy a numerikus megoldás során véges erőforrás (memória és gépidő) áll rendelkezésünkre, így az eredményeket is csak valamely elismert hibával várjuk. A hiba analízise, vagyis annak elemzése, hogy miképpen viselkedik (csökken) a hiba a ráfordított többleterőforrás függvényében, hozzá tartozik az egyes numerikus módszerek vizsgálatához.

**1. módszer (rácspontmódszer).** *Legyen adott egy  $n$  természetes szám. Legyen  $(x_i)_{i=0, \dots, n}$  tetszőleges, monoton növekvő  $\mathbb{R}$ -beli sorozat úgy, hogy  $x_0 = a$  és  $x_n = b$ . Legyen  $Z = \{z \in \mathbb{N} \mid f(x_z) \cdot f(x_{z+1}) \leq 0\}$ . Ekkor minden  $z \in Z$ -re  $f$ -nek zérushelye van az  $M_z = [x_z, x_{z+1}]$  intervallumban, továbbá az  $\tilde{x}_z = \frac{1}{2}(x_z + x_{z+1})$  számok  $h_z = \frac{1}{2}(x_{z+1} - x_z)$  hibával becslik  $f$  valamely zérushelyét.*

Látható, hogy a rácspontmódszerben a felosztás finomításával tetszőleges pontossággal meg tudjuk keresni  $f$  zérushelyeit, tehát a módszer hatásos. Könnyű belátni, hogy  $h_k$  felére csökkentéséhez  $2n$  tagú felosztás szükséges. Abban az esetben, ha tudjuk, hogy valamelyik  $M$  intervallumban csak egy zérushely van, hatékonyabb módszert is találhatunk. Ekkor ugyanis elég már csak  $M_z$ -t felosztani. Így lényegében már el is jutottunk a következő módszerhez.

**2. módszer (intervallumfelezés).** Feltehetjük, hogy  $f(a) \leq 0$ . Ha  $f$ -nek  $[a, b]$  intervallumban csak egy zérushelye van, akkor értelmezzük az  $(a_i, b_i)_{i \in \mathbb{N}}$   $\mathbb{R}^2$ -beli sorozatot a következőképpen:  $(a_0, b_0) = (a, b)$  és

$$(a_{i+1}, b_{i+1}) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}(a_i + b_i), b_i\right) & \text{ha } f\left(\frac{a_i + b_i}{2}\right) < 0 \\ \left(a_i, \frac{1}{2}(a_i + b_i)\right) & \text{ha } f\left(\frac{a_i + b_i}{2}\right) > 0. \end{cases}$$

A módszer  $n$ . lépésében az  $\tilde{x} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$  közelítés  $h_n = \frac{1}{2}(b_n - a_n)$  hibával közelíti a zérushelyet.

Könnyű belátni, hogy az intervallumfelezés módszerével a hiba  $q$ -ad részére való csökkentéséhez körülbelül  $\log_2 q$  lépésre van szükség, szemben a rácspontmódszer  $q$ -szoros lépésigényével. Ez a nagymértékű javulás  $f$  zérushelyei elhelyezkedése bizonyos fokú ismeretének köszönhető. Amennyiben ilyen ismerettel nem rendelkezünk, de  $f$  folytonosságáról tudunk kicsit „részletesebben” nyilatkozni, alkalmazhatjuk a következő módszereket.

A következő módszerekhez néhány kiegészítést kell fűzni. Adott  $f$  függvény Lipschitz-folytonos, ha létezik egy  $L_f > 0$  valós szám, hogy

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : |f(x) - f(y)| < L_f \cdot |x - y|.$$

Ha  $L_f \in (0, 1)$ , akkor azt mondjuk, hogy  $f$  kontrakció.

**3. módszer (egyszerű iteráció).** Legyen  $g$  olyan függvény, hogy minden olyan  $x$ -re, amelyre  $x = g(x)$ ,  $f(x) = 0$ . Legyen  $x_0$  tetszőleges ( $g$  értelmezési tartományából vett) szám. Ha  $g$  kontrakció ( $C$  kontrakciós együtthatóval, akkor az

$$x_{i+1} = g(x_i)$$

sorozat konvergens, és  $g$  fixpontjához,  $f$  zéruspontjához konvergál. A zérushely  $n$ -edik lépésében adott  $\tilde{x}_n = x_n$  közelítésének hibája  $q$ -ad részére való csökkentéséhez lényegében  $\log_c q$  lépésre van szükség.

Megjegyezzük, hogy természetesen  $g$ -t megválaszthatjuk a  $g = f + \text{id}_{\mathbb{R}}$  transzformációval is, de ez nem kötelező. A módszerben definiált sorozat konvergenciája a Banach-féle fixponttételből következik. Amennyiben az intervallumfelezés és az egyszerű iteráció módszereinek feltételei egyaránt teljesülnek, az utóbbit akkor érdemes alkalmazni, ha  $g$  kontrakciós együtthatója kisebb mint  $1/2$ . Amennyiben  $f$  simaságáról még többet tudunk, ajánlhatjuk az úgynevezett Newton-módszert.

**4. módszer (Newton-módszer).** Ha  $f$  differenciálható az  $[a, b]$  intervallumon, és deriváltja Lipschitz-folytonos  $L$  Lipschitz-állandóval, és

$$(\exists \alpha > 0)(\forall x \in (a, b)) : |f'(x)| > \frac{1}{\alpha},$$

továbbá  $(\exists x^* \in (a, b))(f(x^*)) = 0$ , akkor  $x^*$ -nak létezik olyan környezete, amelyben  $x^*$  az egyetlen gyök, és amelyből vett tetszőleges  $x_0$  esetén az

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

sorozat konvergens, és  $x^*$ -hoz konvergál. A  $h_n = |x_n - x^*|$  hibára pedig érvényes a



$$h_{n+1} \leq \frac{L\alpha}{2} \cdot h_n^2$$

becslés.

A Newton-módszert széles körben alkalmazzák nemlineáris egyenletek megoldására, amennyiben rendelkezésre áll  $f$  deriváltja, valamint a megoldás egy megfelelő közelítése (a konvergenciatarományból), mert mint a módszer hibájára vonatkozó összefüggés is mutatja, a konvergencia igen gyors. (A hibára vonatkozó összefüggés alapján a Newton-módszerrel kapcsolatban szokás másodrendű konvergenciáról beszélni, míg az intervallumfelezés esetében a konvergencia csak elsőrendű.) A gyakorlatban persze a módszer „kipróbálása” sokkal könnyebben elvégezhető, mint a konvergencia feltételeinek ellenőrzése. Amennyiben nem áll rendelkezésre  $f$  deriváltja, a Newton-módszert a következő módosítással alkalmazhatjuk.

**5. módszer (szelőmódszer).** *Tegyük fel, hogy a Newton-módszer feltételei teljesülnek, továbbá  $f$  kétszer differenciálható. Ekkor a Newton-módszerben definiált zérushely körüli intervallumból vett  $x_0$  és  $x_1$  esetén az*

$$x_{i+1} = \frac{f(x_i)x_{i+1} - f(x_{i+1})x_i}{f(x_i) - f(x_{i+1})}$$

*sorozat konvergens, és  $x^*$ -hoz konvergál. Belátható, hogy a  $h_n = |x_n - x^*|$  hibára a*

$$h_{n+1} \leq \frac{1}{2}(h_{n-1} + h_n)h_n$$

*becslés adható.*

Megjegyezzük, hogy a szelőmódszer a Newton-módszer közelítésének felel meg, abban az értelemben, hogy a Newton-módszerben alkalmazott deriváltat közelíti a szelőmódszer által meghatározott pontokban számított differenciahányadossal. Érdeemes felfigyelni arra, hogy bár a Newton-módszer közelítéséről van szó, a szelőmódszer konvergenciájának feltétele *szigorúbb*, ugyanakkor a módszer hibájára vonatkozó becslés alapján megmutatható, hogy konvergenciájának rendje alacsonyabb, mint a Newton-módszeré. Ezért a szelőmódszer alkalmazása csak akkor lehet indokolt, amikor  $f$  deriváltjának kiszámítása akadályokba ütközik (például jelentős mértékben bonyolulttá tenné az algoritmust).

Láthatjuk, hogy az összes ismertett módszer alkalmazásának szigorú feltételei vannak. Ezek vizsgálata bonyolult lehet, mint azt a Newton-módszernél már jeleztük, sokszor célravezetőbb egyszerűen csak „kipróbálni” a módszert. Ezt könnyen megtehetjük egyszerűbb problémák esetében. Amikor azonban egy összetett probléma részeként kell megoldanunk egy nemlineáris egyenletet, akkor nem bízhatjuk magunkat a „véletlenre”. Azt ugyanis sokkal könnyebb felismerni, hogy egy módszer működik, mint azt, hogy nem! A következő módszer egy olyan megoldást kínál, amely biztosítja a fenti módszerek alkalmazásának feltételét.

**6. módszer (a folytatás módszere).** *Legyen  $g : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvény olyan, hogy  $g(0, \cdot)$  zérushelyei ismertek,  $g(1, \cdot) = f$ , és  $g$  folytonos. Legyen  $x_0$   $g(0, \cdot) = 0$  megoldása. Ekkor az  $n$  természetes szám és a  $[0, 1]$  intervallum megfelelő  $(t_i)_{i=0, \dots, n}$  felosztásával elérhető, hogy minden  $i$ -re  $x_i$  benne legyen  $g(t_i, \cdot)$  függvény egy választott numerikus nemlineáris egyenletmegoldási módszer konvergenciatartományában, amely választott módszerrel  $x_{i-1}$ -ből indítva a  $g(t_i, \cdot) = 0$  egyenleteket megoldva, definiáljuk az  $(x_i)_{i=0, \dots, n}$  rendszert. Az eredmény,  $\tilde{x} = x_n$ , hibája megegyezik  $n$ -edik lépésként végrehajtott egyenlet megoldásának hibájával.*

A folytatás módszerének egy tipikus alkalmazása az úgynevezett tompítás. Ekkor  $g$ -t a  $g(t, x) = f(x) + (t - 1)f(x_0)$  alakban írják fel, de jó néhány más megoldás is alkalmazha-



tó. A módszer gyengéje, hogy számtalan olyan köztes megoldás kiszámítását igényli, amely az eredmény szempontjából végül is lényegtelen, vagyis a módszer nem kellőképpen hatékony. Ezért a módszert leginkább olyan esetekben szokták csak alkalmazni, amikor a hatékonyabb módszerek konvergenciája nem kellőképpen (vagy egyáltalán nem) biztosított.

A nemlineáris egyenletek megoldásának előzőkben bemutatott numerikus módszerei kivétel nélkül általánosíthatók többdimenziós esetre is, bár ekkor az egyes módszerek közötti hatékonyságbeli különbségek már hatványozottan jelentkeznek. Ugyanakkor több dimenzióban alkalmazhatók olyan módszerek is (mint például a gradiens módszerek), amelyek egy dimenzióban még nem voltak értelmezhetők. Mivel az általunk vizsgált közgazdaságtani modellek az átláthatóságot szem előtt tartva csak néhány csoportot kezelnek, ezért a dimenziószám növekedése nem okoz gondot, így ezeket részletesebben most nem ismertetjük, megelégedhetünk az egydimenziós módszerek megfelelő általánosításaival.

A modell számítása során több helyen is szükségünk lesz arra, hogy meghatározzuk az

$$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad x \mapsto x e^x$$

függvény inverzét, amelyet a továbbiakban  $W$ -vel jelölünk (Lambert-féle  $W$  függvény). Kiszámítására hatékony algoritmust készíthetünk a Newton-módszer segítségével. Legyen tehát  $y \in \mathbb{R}^+$  tetszőleges, és keressük a  $W(x) = y$  egyenlet megoldását, amely  $W$  definíciója alapján nyilván egyenértékű az  $ye^y - x = 0$  egyenlet megoldásával. Az egyenlet bal oldalán álló függvényről belátható, hogy analitikus, deriváltja pozitív számmal (1-gyel) alulról becsülhető, és a függvény maga csak egyetlen helyen veszi fel a 0-t. A Newton-módszer tehát alkalmazható:

$$y_{k+1} = \frac{y_k^2 + x e^{-y_k}}{1 + y_k} \quad (9)$$

sorozatot kapjuk, amely tetszőleges  $y_0 \in \mathbb{R}^+$  pontból indítva globálisan konvergens.

### A modell numerikus megoldása

Természetesen a már bemutatott nyugdíjösztönzési modell numerikus megoldására több módszert is találhatók. *Simonovits* [2003] eredeti cikkében a rácspontmódszert alkalmazta, amely az alábbi eredményeink alapján kevésbé hatékonynak mondható: a szerzővel való konzultáció alapján a módszer megfelelő pontosságú futtatása irreálisan sok erőforrást igényelne. *Eső-Simonovits* [2003] az intervallumfelezés hatékony módszerét alkalmazták, de ez csak abban a speciális esetben működik, amikor  $D$  és  $\varepsilon$  egymással függvényyszerű kapcsolatban van (egydimenziós probléma). Az általános esetet mi a következőképpen tesszük numerikusan vizsgálhatóvá.

Mindenekelőtt az  $F(\varepsilon, D)$  eloszlást diszkretizáljuk. Ez a legegyszerűbben úgy történhet, hogy választunk egy  $n \in \mathbb{N}$  számot, a paramétereket pedig az  $F$  eloszlásnak megfelelően, mint véletlen változókat realizáljuk. Így kapjuk az  $(\varepsilon_i, D_i)_{i=1, \dots, n}$  paraméterrendszerrel. A későbbiekben technikai jelentőséget kapnak az előbbi paraméterrendszerhez értelmezett  $(f_i)_{i=1, \dots, n}$  valószínűségi súlyok, amelyek a paraméterek generálása miatt egy egyenletes eloszlásnak felelnek meg. A korábban leírtakkal megegyező tartalommal, adottan tekintjük a modell további paramétereit: a  $\lambda \in [0; 1]$  és a  $\sigma \leq 1$  számokat. A numerikus megoldás során viszont a nyugdíjösztönzés optimális formuláját az ismertetett modelltől eltérően, a

$$b(R) = \gamma \exp(\rho R) \quad \gamma, \rho > 0$$

alakban keressük. Ennek az az egyszerű oka, hogy a lineáris formulával ellentétben a fenti formula sosem negatív, illetve a formula pozitivitása sokkal könnyebben ellenőrizhető. Nem szabad figyelmen kívül hagynunk ugyanis, hogy a numerikus megoldás során nem mindig vagyunk az optimumban, ahhoz közelítő lépéseken keresztül jutunk el. Ha olyan nyugdíjformulát használunk, amely negatív értéket is adhat az eljárás során, amikor is a hasznosságfüggvény nincs értelmezve [lásd az (1) összefüggést], akkor az algoritmus vagy leáll, vagy ezt az esetet külön ellenőriznünk, kezelniük kellene. Az exponenciális formula ugyanakkor – a lineárishoz képest – semmivel sem csorbítja vizsgálódásaink általánosságát. Az egyéni hasznosságfüggvény a fentiek alapján következő:

$$U_i = \frac{1}{\sigma} [\lambda^{(1-\varepsilon_i)\sigma} (1-\tau)^{\varepsilon_i\sigma} R_i + (\gamma e^{\rho R_i})^{\varepsilon_i\sigma} (D_i - R_i)].$$

A feladat az, hogy maximalizáljuk az utilitarista megközelítésnek megfelelő

$$U = \sum_i f_i U_i$$

társadalmi jóléti függvényt az

$$\frac{\partial U_i}{\partial R_i} = 0 \quad \text{és} \quad \sum_{i=1}^n f_i [R_i \tau - \gamma e^{\rho R_i} (D_i - R_i)] = 0$$

mellékfeltételek mellett.

A modell megoldásának egyik lehetőségét vázoljuk fel a következőkben. Az elméleti megfontolások alapján  $\varepsilon$  és  $D$  (illetve  $p$ ) változók az egyéneket jellemző paraméterek, ezeket és  $\lambda$  és  $\sigma$  paramétereket – mint arról már szoltunk – ismertnek tételezzük fel. Azt már mi dönthettük el, hogy a maradék  $n + 3$  változó ( $\tau$ ,  $\gamma$ ,  $\rho$  és  $R_i$ ) közül melyeket határozzunk meg a mellékfeltételek és melyeket a társadalmi jóléti függvény maximalizálásával. A költségvetési mellékfeltételből fejezzük ki  $\tau$ -t:

$$\tau = \frac{\sum_{i=1}^n f_i \gamma e^{\rho R_i} (D_i - R_i)}{\sum_{i=1}^n f_i R_i}. \quad (10)$$

Az egyéni optimumra vonatkozó mellékfeltételből pedig  $R$ -eket:

$$R_i = D_i - \frac{1 - \mathcal{W} \left( e^{\lambda^{(1-\varepsilon_i)\sigma} \left( \frac{1-\tau}{\gamma e^{\rho D_i}} \right)^{\varepsilon_i\sigma}} \right)}{\varepsilon_i \sigma \rho}, \quad (11)$$

ahol  $\mathcal{W}$  jelöli az  $x \rightarrow x e^x$  függvény inverzét (szokás ezt a már említett Lambert-féle  $\mathcal{W}$  függvénynek is nevezni). Az előző alfejezetben megmutattuk, hogyan lehet a  $\mathcal{W}$  függvényt hatékonyan kiszámítani a Newton-módszer segítségével. Az (10)–(11) nemlineáris egyenletrendszer pedig  $(R_i)_{i=1, \dots, n}$  és  $\tau$  változók tekintetében kontrakció, így az egyszerű iteráció a megoldáskor hatékonyan bizonyul. A fentiek alapján adott  $\gamma$  és  $\rho$  esetén meghatározhatók az  $(R_i)_{i=1, \dots, n}$  és  $\tau$  változók, kiszámítható a társadalmi jóléti függvény.

A társadalmi jóléti függvény ekkor már csak a  $\gamma$  és  $\rho$  változóktól, a nyugdíjformula paramétereitől függ. A probléma az, hogy a társadalmi jóléti függvény e két változónak igencsak „kellemetlen” viselkedésű függvénye. Megfigyeléseink szerint igen könnyű olyan nyugdíjformulát megadni, amelynek alapján több csoport is élettartamával megegyező szolgálati időt választ. Így ha belső optimummal van dolgunk, akkor az ehhez vezető út nem elég sima, deriváltja nem minden pontban értelmezett, hiszen  $V(\gamma, \rho)$  másképpen viselkedik akkor, amikor az egyik csoport  $R$  szolgálati ideje „lekerül” az  $R \leq D$  határfeltételről. További gondot jelent, hogy  $V(\gamma, \rho)$  második deriváltja még azokon a helyeken,

amikor  $R$  szolgálati idők belső pontok is, nem mindenütt (negatív) definit, így a hatékony Newton-módszer csak az optimum közeléből indítható. Általános esetben pedig nem tudunk – a Newton-módszer konvergenciatartományának megfelelő – elég jó kezdeti becslést adni.

A modellben szereplő társadalmi jóléti függvény optimalizációjának megbízható módját mi célszerűnek látjuk a *folytatás módszerével* elvégezni. Vegyük észre, hogy ha csak annyiban térünk el a megoldani kívánt modelltől, hogy megváltoztatjuk az egyes csoportok  $(f_i)$  súlyait, és ezeket a változtatásokat „simán”, kellően kis lépésekben végezzük, akkor ezeknek a változásoknak a függvényében az optimum is „simán”, kellően kis lépésekben változik, legalábbis kellően kis lépésekben ahhoz, hogy a súlyok megváltoztatása után továbbra is a Newton-módszer konvergenciatartományában maradjunk.

Tekintsük a  $(f_i)$  paraméterektől függő  $V_f$  függvény maximumát, amit egy új  $t$  paraméter bevezetésével a következő módon fogalmazunk át. Tegyük fel, hogy ismerjük  $V_{f_0}$  maximumát, és tekintsük a  $V(t, x) = V_{(1-t)f_0+tf_1}(x)$  függvényt. Ekkor a keresett  $V(1, x)$  függvény maximumát az implicitfüggvény-tétel alkalmazásával a

$$\frac{dx_i}{dt} = -\sum_j \left[ \frac{\partial^2 V(t, x)}{\partial x_i \partial x_j} \right]^{-1} \frac{d}{dt} \frac{\partial V(t, x)}{\partial x_j} \quad (12)$$

közönséges differenciálegyenlet adja meg, amelyről feltételezzük, hogy jól definiált, mert kezdőfeltétele a  $V(0, x)$  maximumából már ismert, és minden  $t \in [0; 1]$ -re  $V$  maximumhelye differenciálhatóan függ  $t$ -től. Természetesen ez utóbbi feltételezés csak akkor értelmezhető, ha minden  $t \in [0; 1]$ -re  $V$ -nek csak egyetlen maximuma van (esetünkben ez fennáll). De még ebben az esetben is elképzelhető lenne olyan helyzet, hogy az  $x(t)$  maximumhelyet kifejező megoldásnak szakadása lenne. Ekkor azonban lenne olyan  $t$ , amelyre a maximum nem egyetlen pont: így a differenciálható függés mellett feltételeznünk kell azt, hogy minden  $t \in [0; 1]$ -re  $V$ -nek *egyetlen* globális maximuma legyen. Ez szintén fennáll esetünkben, hiszen minden  $t$ -re  $(f_i)_{i=1, \dots, n}$ -nek olyan kombinációja áll elő, amely benne halad a modell paraméterértelmezési tartományában, márpedig feltételeztük, hogy a modellben alkalmazott  $V$ -nek minden értelmezési tartományból választott paraméter esetében csak egyetlen maximuma lehet. Így a (12) differenciálegyenlet megoldásával, valóban megkaphatjuk tetszőleges paraméterválasztás mellett a társadalmi jólétet maximalizáló  $(\gamma, \rho)$  párt.

Az (12) differenciálegyenlet megoldására valamely közönséges differenciálegyenletekre vonatkozó megoldási módszert alkalmazunk. Tapasztalatunk szerint az optimum  $t$  segédváltozótól való függése nem olyan bonyolult, hogy a differenciálegyenlet megoldási módszerének finomítása jelentősen megnövelné a számítási eljárás hatékonyságát, így akár alkalmazhatnánk az egyszerű Euler-módszert is (mi harmadrendű Runge-Kuttamódszert alkalmaztunk, a közönséges differenciálegyenletek numerikus megoldásáról részletesebben lásd *Stoyan-Takó* [1993]). Észrevettük azonban azt is, hogy a folytatás módszerével különösen fontos arra figyelni, hogy a differenciálegyenlet megoldásának minden lépésében az optimumban legyünk. Ezért minden lépés előtt végrehajtottunk a közönséges optimum egy Newton-korrekcióját.

Lényeges kérdés a kezdőcsoport kijelölése, vagyis az, hogy melyik csoport autark optimumából indítjuk a folytatás módszerét. Ha ugyanis szélsőséges paraméterű csoportot választunk, akkor a differenciálegyenletek lépésköze nem feltétlenül elég kicsi ahhoz, hogy biztosan a Newton-módszer konvergenciatartományában maradjunk. Ha azonban megfelelően sok (száznál több) csoporttal dolgozunk, akkor tapasztalatunk szerint elegendő egyszerűen a „középső” csoportok valamelyikét kijelölni. Ha kevés vagy csak néhány csoporttal dolgozunk, akkor célszerű bevezetni egy újabb csoportot, amelyet átlagos paraméterekkel látunk el (természetesen ennek a csoportnak a súlya végül 0 lesz).

### Megoldás és hibaszámítás

A numerikus közelítő eljárások általában iteratív megközelítésűek, vagyis az eljárás ciklusának megismétlésével jobb közelítést kaphatunk. A numerikus analízis feladata nemcsak az, hogy megállapítsa, milyen feltételek mellett kapunk konvergens és az analitikus megoldáshoz konvergáló sorozatot, hanem az is, hogy a gyakorlatban jelentkező gépi számábrázolás korlátai (kerékítési hibák) milyen határt jelölnek ki az iterációk folytatásához (leállási feltétel). Egy kifejezést a numerikus értékelés szempontjából stabilnak tekinthetünk, ha a kifejezésben szereplő változóiban jelenlévő számábrázolási hibák nem torzítják „túlságosan” az eredményt, vagyis ha a kifejezés változói szerinti deriváltjai „kicsik”. Pontosabb definíció azért nem létezik a numerikus matematika irodalmában, mert tulajdonképpen itt nem a deriváltak nagysága a döntő, hanem az, hogy fennáll-e a veszélye annak, hogy a deriváltak nagyok (is) lehetnek. (Így például a  $10^6 \cdot x$  numerikusan stabilnak, az  $1/x$  kifejezés „a 0 közelében” pedig numerikusan instabilnak tekintendő.) A kerékítési hibákon túl az iterációs eljárások esetében figyelembe kell vennünk azt is, hogy az iterációk során a hibák felhalmozódhatnak.

Esetünkben – a fenti szempontok alapján – úgy döntöttünk, hogy az iterációk leállási feltételében a változók utolsó 6 tizedesjegyet már nem vesszük figyelembe, mert ezek a numerikus értékelés hibáit és ezek halmozódásait tartalmazzák. Mivel az általunk használt számábrázolás 15 tizedesjegyet kezel, a 6 tizedesjegy figyelmen kívül hagyása  $10^{-9}$ -es relatív hibát jelent. A következőkben azt vizsgáljuk meg, hogy ezen leállási feltétel választása milyen hibát jelent az eredményváltozóiban.

Vegyük észre, hogy A modell numerikus megoldása című alfejezetben bemutatott numerikus eljárás alapvetően a mellékfeltételek kielégítésének és a második legjobb optimum megtalálásának ütemére osztható. A mellékfeltételek kielégítésekor három iterációs eljárást is alkalmazunk, a hibaelemzés kapcsán elsősorban ezeket kell megvizsgálnunk, hiszen a hibák halmozódása elsősorban iterációk folyamán jöhet létre. Iterációs eljárást alkalmazunk  $\mathcal{V}$  értékelésére (Newton-módszer),  $(R_i)_i$  kiszámítására (Newton-módszer), és végül ezeket egyesítve  $\tau$  kiszámítására (egyszerű iteráció). A mellékfeltételek kielégítése során elkövetett hibát a  $V$  társadalmi jólét értékének hibájával fejezzük ki, amelyet elsősorban az előbbi iterációk közül a leglassabb fog meghatározni. Mivel a Newton-módszer másodrendben, az egyszerű iteráció viszont csak első rendben konvergens, csak ez utóbbival kell részletesebben foglalkoznunk.

Amikor az egyszerű iteráció már elég közel jár a fixponthoz, a leképezés (gondolunk most a  $\tau$ -ra vonatkozó iterációra) tekinthető lineárisnak, vagyis felírható  $x_{k+1} = ax_k + (1-a)\bar{x}$  alakban. Ekkor viszont  $x_{k+1} - \bar{x} = \frac{a}{1-a}(x_k - \bar{x})$ , vagyis ha  $a < \frac{1}{2}$ , akkor az eljárás hibája becsülhető az utolsó iterációs lépésben észlelt korrekcióval. Esetünkben  $a \approx 0,1$ , így ez a módszer alkalmazható:  $V$  számításának hibájára  $\varepsilon_v = 2 \cdot 10^{-8}$ -t kapunk.

Az eljárás második ütemében alkalmazott Newton-módszerhez a deriváltakat numerikusan becsüljük.

$$\|f(x + \Delta x) - (T_{x,n}(f))(x + \Delta x)\| \leq \frac{\|\Delta x\|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot M_{n+1}, \quad (13)$$

ahol

$$M_n = \sup_{z \in [x, x+\Delta x]} \|(D^n f)(z)\| \quad \text{és}$$

$$(T_{x,n}(f))(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} ((D^k f)(x)) (\Delta x^{[k]}).$$

Az utóbbi kifejezés a Taylor-polinom általános alakja, ahol ha  $f : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}^M$  függ-

vény, akkor  $D^k f$  jelöli a megfelelő  $\mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}^M$   $k$ -lineáris operátort (deriváltat), és  $\Delta x^{(k)} \in \mathbb{R}^k$  azt az elemet, amelyre minden  $i \in k$  esetén  $(\Delta x^{(k)})_i = \Delta x$  (itt  $\Delta x \in \mathbb{R}^N$ ). A (13) alapján most kiszámítjuk a deriváltat közelítő

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x}$$

formula hibáját. Az egyszerűség kedvéért jelölje  $f_{\pm} = f(x \pm \Delta x)$  és  $\mathbf{f}$  az  $f$  függvény numerikus kiértékelését, amelynek hibája  $\varepsilon_f \geq |\mathbf{f} - f|$ . Ekkor

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{f}_+ - \mathbf{f}_-}{2\Delta x} - (D^1 f) &= \frac{\mathbf{f}_+ - f_+}{2\Delta x} - \frac{\mathbf{f}_- - f_-}{2\Delta x} + \\ &+ \frac{f_+ - (f + (D^1 f)\Delta x)}{2\Delta x} - \frac{f_- - (f - (D^1 f)\Delta x)}{2\Delta x}. \end{aligned}$$

Vagyis

$$\left| \frac{\mathbf{f}_+ - \mathbf{f}_-}{2\Delta x} - (D^1 f) \right| \leq \frac{\varepsilon_f}{2\Delta x} + \frac{\varepsilon_f}{2\Delta x} + \frac{1}{2\Delta x} \frac{\Delta x^2}{2!} M_2 + \frac{1}{2\Delta x} \frac{\Delta x^2}{2!} M_2.$$

A differenciaformula használatakor felmerülő teljes hiba tehát két részből, a függvény kiértékelésének hibájából és a formulához tartozó képlethibából tevődik össze. De amíg a kiértékelési hibából eredő rész  $\Delta x$  növelésével csökkenti, addig a képlethibából eredő rész növeli a teljes hibát. Ésszerűnek látszik tehát  $\Delta x$ -t úgy megválasztani, hogy az a teljes hibát minimalizálja, így  $\Delta x^* = 2\sqrt{\varepsilon_f / M_2}$ -t kapunk. Hasonló megfontolások alap-

ján a másodrendű derivált esetében  $\Delta x^* = \sqrt[3]{24\varepsilon_f / M_3}$  és a vegyes másodrendű deriváltra

$[(\partial^2 V)/(\partial \gamma \partial \rho)]$  pedig  $\Delta x^* = \Delta y^* = \sqrt[3]{\varepsilon_f / (\sqrt{2} M_3)}$  adódik. Úgy tűnik, hogy a fenti optimá-

lis értéknél kisebb  $\Delta x$ -ek jobban veszélyeztetnék az eljárás stabilitását, hiszen ezekre a teljes hiba gyorsabban nő. A stabilitáson kívül az eljárás pontosságának szempontja viszont nem teszi szükségessé, hogy  $\Delta x$ -t „minden határon túl” kicsinek válasszuk: megelégedhetünk egy olyan  $\Delta x$  választással, amelyre a vizsgált függvény ( $V$ )  $\Delta x$ -nek megfelelő nagyságú környezetében elég jól közelíthető egy másodrendű összefüggéssel. Ezt úgy fogalmazhatjuk meg, hogy a másodrendű Taylor-polinom eltérése az eredeti függvénytől legyen kicsi egy  $\tilde{\varepsilon}_f$  rögzített hibához képest. Azaz a (13)-t felhasználva:

$$\left| \frac{f(x + \Delta x) - (T_{x,2}(f))(x)}{\tilde{\varepsilon}_f} \right| \leq \frac{\Delta x^3}{3!} M_3 \approx 1, \quad \text{így} \quad \Delta x \lesssim \sqrt[3]{\frac{6 \cdot \tilde{\varepsilon}_f}{M_3}}.$$

Nyilvánvaló, hogy  $\tilde{\varepsilon}_f$  értékét, amely a másodrendű közelítés tűréshatárát szabja meg, nem célszerű a függvény  $\varepsilon_f$  számítási hibájánál kisebbnek választani. Viszont  $\tilde{\varepsilon}_f \approx \varepsilon_f$  esetén, a második derivált formula becsült hibáját minimalizáló  $\Delta x^* = \sqrt[3]{24\varepsilon_f / M_3}$  egy nagyságrendbe kerül azzal a nagyságú környezettel, amelyben a függvény másodrendben jól közelíthető, vagyis az optimális  $\Delta x^*$  értékeket választva, nemcsak jól közelítjük a deriváltakat, de egyben a numerikus algoritmusunk második ütemének (Newton-módszer) torzításmentes konvergenciája is biztosított.

A fentiek alapján azt a következtetést kell levonnunk, hogy a hibaanalízis a numerikus eljárásunk hatékonyságának megkerülhetetlen eleme: az első ütemben felmerülő számítá-

si hibákat ( $\varepsilon$ ) a második ütemben szereplő paraméterekkel ( $\Delta x$ ) össze kell hangolni, és ez nemcsak a konvergencia, hanem a differenciaformulákkal felírt Newton-módszer torzításmertességének a feltétele is egyben. A hangolás elvégzéséhez becsülnünk kell az  $M_2$  és  $M_3$  értékeket. Ezeket az optimumbeli operátornormákkal közelítjük. Valójában  $M_n$  kiszámításához nincs szükség a teljes  $n$ -lineáris (derivált) operátor kiszámítására, hiszen ennek csak a normájára vagyunk kíváncsiak, így felhasználjuk az irány menti deriváltak alábbi tulajdonságát:

$$\left. \frac{d^n f(x + \lambda e)}{d\lambda^n} \right|_{\lambda=0} = (D^n f(x))(e^{(n)}).$$

$M_n$ -t ahhoz az  $\varepsilon$  vektoroz tartozó  $n$ -ed rendű irány menti deriválttal becsüljük, amely egy megfelelő felbontású Monte-Carlo-szimuláció alapján maximálisnak tekinthető. Itt persze újra felmerül a kérdés, hogy ha az irány menti deriváltakat szintén differenciaformula segítségével határozzuk meg, akkor hogyan válasszuk meg most a megfelelő  $\Delta\lambda$ -t? Valójában  $\Delta x$  értékének nem optimális értéke, hanem optimális nagyságrendje van, így ha  $\|\Delta\lambda e\|$  körülbelül összhangban van a  $\Delta x^*$ -gal, akkor elfogadhatjuk az alkalmazott  $\Delta\lambda$ -t is. A fentiek alapján ( $\varepsilon_v = 2 \cdot 10^{-8}$ )  $M_2 \approx 17 \cdot 10^3$ ,  $M_3 \approx 545 \cdot 10^3$ , és így  $\Delta x = -10^{-4}$ -et alkalmaztunk.

Az eddigiekben, az eljárásunk ütemeinek megfelelő összehangolásával elértük azt, hogy a felbukkanó számítási hibák mind  $V$  kiértékelésének hibájára vezethetők vissza. Így most az optimum hibáját is  $\varepsilon_v$ -vel hozzuk kapcsolatba.

A  $V$  társadalmi jóléti függvény kiértékelésének hibájára gondolhatunk úgy is, mintha a valódi (analitikus) érték a  $[V - \varepsilon_v, V + \varepsilon_v]$  intervallumban lenne. Ez viszont azt jelenti, hogy a valódi (analitikusan kiértékelt) optimumnak abban a halmazban kell lennie, amelyet a  $V$  társadalmi jóléti függvény a numerikusan kiértékelt  $V^*$  optimum  $[V^* - \varepsilon_v, V^* + \varepsilon_v]$  környezetébe képez. Mivel  $\varepsilon_v$  elég kicsi, az optimum közelében  $V$  másodrendben jól közelíthető (lásd fenn). Így az optimum hibáját a

$$V^* + \frac{1}{2}(x - x^*)(D^2V)(x - x^*) \geq V^* - \varepsilon_v$$

összefüggés adja meg, amely  $x = (\gamma, \rho)$ -ra egy ellipszist határoz meg (1. ábra).

Az ellipszis elnyújt alakjában az a nyilvánvaló érzékenységbeli különbség jelenik meg, hogy  $\gamma$  és  $\rho$  ellentétes változásával a nyugdíjak (és velük az összes többi rendszerjellemező) csak kevésbé változnak meg. Ezek után egy tetszőleges mennyiség numerikus hibáját úgy határozhatjuk meg, hogy ezen ellipszis minden lehetséges  $\gamma$  és  $\rho$  értékéhez [és ezekhez meghatározva a mellékfeltételeket kielégítő összes többi paramétert:  $\tau$  és  $(R_i)$ ] megfigyeljük, hogy az adott mennyiség milyen értékeket vehet fel. A gyakorlatban ezt a megfigyelést Monte-Carlo-módszerrel valósíthatjuk meg a legegyszerűbben. A számítások eredményeit foglalja össze az 1. és 2. táblázat.

#### 1. táblázat

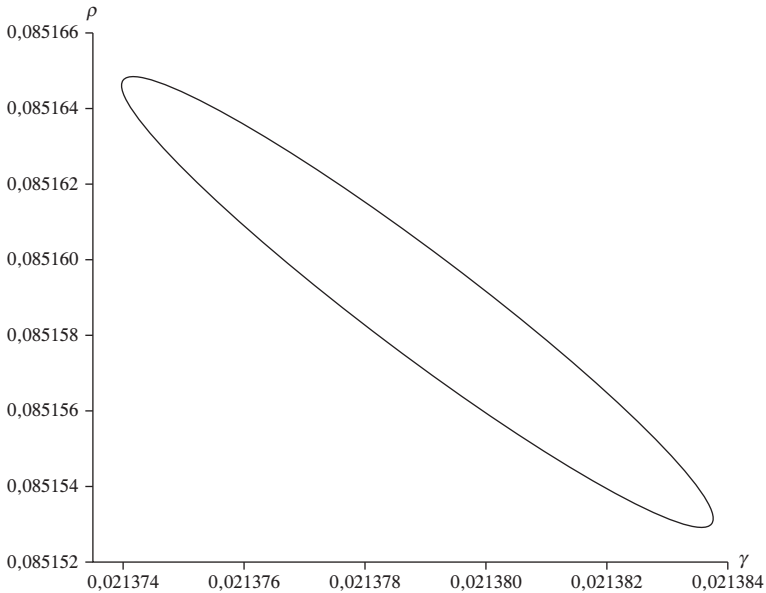
A legfontosabb paraméterek a második legjobb optimum esetén

$$\begin{aligned} \tau &= 0,18655 \pm 10^{-5} \\ \gamma &= 0,021379 \pm 10^{-6} \\ \rho &= 0,085159 \pm 10^{-6} \\ \alpha &= 0,032885 \pm 10^{-6} \end{aligned}$$



1. ábra

A nyugdíjformula paramétereinek ( $\gamma$  és  $\rho$ ) hibája



2. táblázat

A második legjobb optimum paramétereit és ezek becsült számítási hibáit (Monte-Carlo-módszerrel)

$D$	$\epsilon$	$R$	$z$	$U$
45	0,32	$30,5328 \pm 9 \times 10^{-4}$	$1,53311 \pm 1 \times 10^{-4}$	$-76,628696 \pm 0$
	0,35	$32,2383 \pm 8 \times 10^{-4}$	$1,7660 \pm 1 \times 10^{-4}$	$-75,077069 \pm 0$
	0,38	$33,6721 \pm 7 \times 10^{-4}$	$2,0211 \pm 6 \times 10^{-5}$	$-73,262052 \pm 0$
50	0,32	$32,2714 \pm 9 \times 10^{-4}$	$0,10215 \pm 6 \times 10^{-5}$	$81,918235 \pm 0$
	0,35	$33,9891 \pm 8 \times 10^{-4}$	$0,15411 \pm 1 \times 10^{-5}$	$80,201143 \pm 0$
	0,38	$35,4352 \pm 8 \times 10^{-4}$	$0,24511 \pm 3 \times 10^{-5}$	$-78,226278 \pm 0$
55	0,32	$33,9072 \pm 9 \times 10^{-4}$	$-1,768191 \pm 0$	$-86,743067 \pm 0$
	0,35	$35,6268 \pm 8 \times 10^{-4}$	$-1,959901 \pm 0$	$-84,832977 \pm 0$
	0,38	$37,0748 \pm 8 \times 10^{-4}$	$-2,091541 \pm 0$	$-82,672887 \pm 0$

Érdemes megfigyelni, hogy az egyes paraméterek hibái mennyire különböznek egymástól. Míg  $(R_i)_i$  nyugdíjba vonulási korok relatív hibái közel azonosak,  $z_i = \tau R_i - b(R_i) \cdot (D_i - R_i)$  életpálya-egyenlegek mind relatív, mind abszolút hibákat tekintve igen különböznek. A különbségek lényegében az élettartamok függvényei, a relatív hiba a középső és a rövid élettartamú egyénekénél azonosnak tekinthető, ugyanakkor a hosszú élettartamú egyének életpálya-egyenlegének numerikus hibája 0, ami azt jelenti, hogy a numerikus hiba a számbábrázolási hibával azonos nagyságrendű. Ugyanígy a 0 numerikus hibát kapjuk az egyéni életpálya-hasznosságok esetében is. Itt válik igazán szembetűnővé a numerikus hibaanalízis fontossága.  $\gamma$  és  $\rho$  hibája ugyanis egy-két nagyságrenddel a

numerikusan stabil érték alatt található (ami alapján a második deriváltat is becsültük). Ebben a tartományban tehát a numerikusan kiértékelt társadalmi jóléti függvényben tapasztalt különbségek erősen eltérhetnek a valódi (analitikus) értéktől, ezért a tapasztalt eltérésekből semmilyen következtetést nem szabad levonni, így az a következtetés is hibás, hogy az egyéni életpálya-hasznosságok hibája 0. A valódi hibát ismerjük és ez  $\varepsilon_v \approx 10^{-8}$  nagyságrendjében található. (A módszer természetesen minden más esetben helyesen becsli a numerikus hibát, mert a mellékfeltételek kielégítésének numerikus eljárása  $10^{-9}$ -es relatív hibával már érzékeny a  $\gamma$  és  $\rho$  paraméterekben megjelenő  $10^{-4}$ -es relatív változásokra.)

*Simonovits* [2003] eredeti cikkének kulcskérdése a nyugdíjformula meredeksége. Bár úgy tűnik, hogy az ott bemutatott számítások alapján a tompább ösztönzés feltételezése igazoltnak látszik, a cikk nyilvánvalóan sokat veszít bizonyító erejéből a kevésbé hatásos numerikus megvalósítás miatt. A nyugdíjformula meredekségét mi most a nyugdíjak  $[b(R_i)]$  és a nyugdíjba vonulási korok ( $R_i$ ) szórásának hányadosaként mérjük ( $\alpha$ , az „illesztett egyenes” meredeksége). Ennek a megközelítésnek az előnye, hogy egyúttal a naiv ösztönzés meredekségére is változtatás nélkül alkalmazható, így talán az összehasonlításokra is alkalmasabb.

### A nyugdíjösztönzési formula meredeksége

Mielőtt rátérnénk a nyugdíjformula naiv és exponenciális formula esetében tapasztalt meredekségének összehasonlítására, ejtenünk kell néhány szót a naiv ösztönzési feladatról és annak numerikus megoldásáról.

Mint azt már korábban láttuk, a naiv formula a nyugdíjösztönzési probléma szimmetrikus információjú, biztosítási elvű megközelítésén alapszik, miszerint a nyugdíjat a nyugdíjazáskori egyéni számláján lévő összeg ( $\tau R$ ) és a várható nyugdíjas élethossz ( $D^* - R^*$ ) határozza meg:

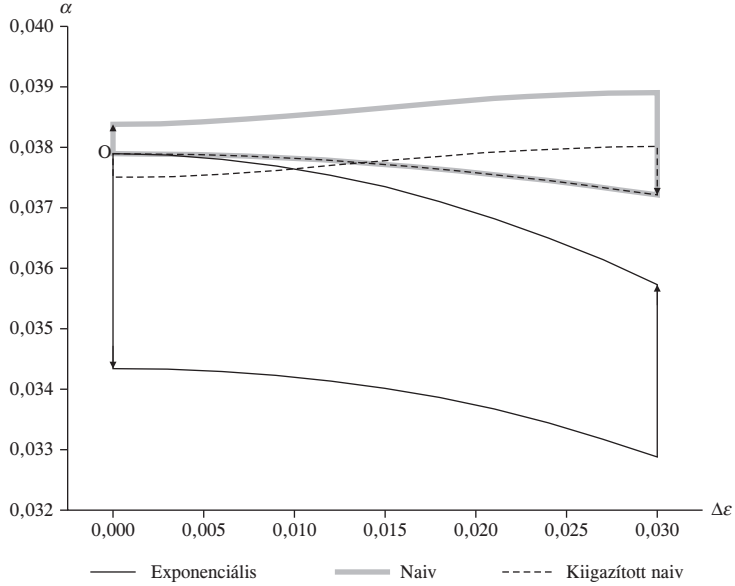
$$b(R) = \frac{\tau R}{D^* - R^*}. \quad (14)$$

A fenti megközelítés viszont nem veszi figyelembe, hogy az egyének információval rendelkeznek saját élettartamukról, és ez befolyásolja nyugdíjazásukról hozott döntéseiket. Így fennáll az a lehetőség, hogy az élettartam és a nyugdíjazási kor közötti korrelációk miatt a rendszer kibillenhet az egyensúlyából. Ennek elkerülésére a (14) formulát valamiképpen (egy új paraméter segítségével) ki kell igazítani. A legegyszerűbb megoldás az, hogy (14)-ben szereplő  $\tau$  helyett egy másik (új) paramétert alkalmazunk, ami tehát nem feltétlenül egyezik meg a járulékkulccsal ( $\tau'$ ). A továbbiakban mi ezt tekintjük a kiigazított naiv ösztönzésnek, bár a (14) formulát még számtalan helyen ki lehetne igazítani (például ha nem az átlagos élettartamot vennénk stb.).

A naiv és kiigazított naiv formulával ösztönzött rendszerek közgazdasági modellje beilleszthető az eddig bemutatott tárgyalási keretbe, azzal az egyetlen különbséggel, hogy más lesz a nyugdíjformula. A modell numerikus megoldása viszont sokkal egyszerűbb. A tiszta naiv ösztönzés esetében a mellékfeltételek csak az  $R$  szerinti maximalizálásból állnak, és a társadalmi jóléte egy paraméter ( $\tau$ ) szerint kell optimalizálni. A kiigazított naiv ösztönzés esetében a mellékfeltételekhez csatolnunk kell a nyugdíjformulában alkalmazott  $\tau'$  számítását is. Könnyen beláthatjuk, hogy az exponenciális formulára bemutatott numerikus eljárás megfelelő egyszerűsítéseinek a naiv formulák esetében is hatékonyan kell bizonyulniuk. A kevesebb paraméter miatt az eljárás stabil marad, továbbá az exponenciális formulával kapott becslő hibák a naiv formulák esetében felmerülő numerikus hibákat felülről becslik. Ez utóbbi az exponenciális formulák esetében négy-

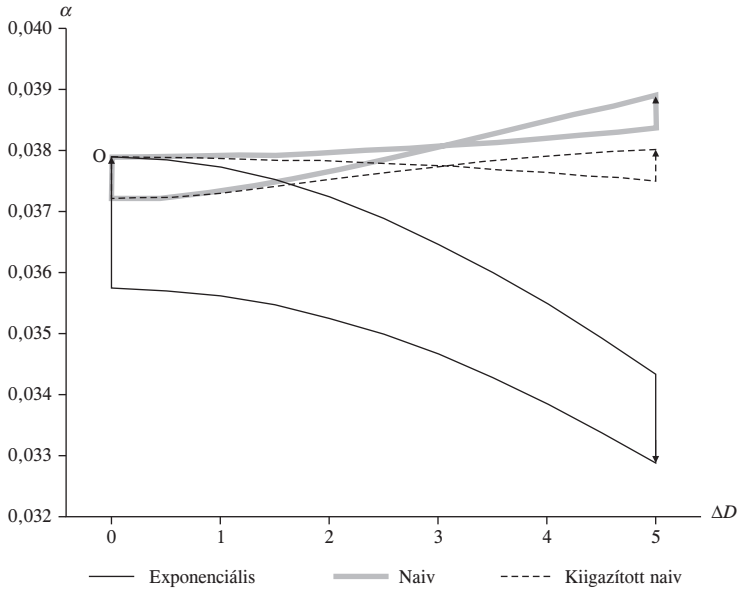
2. ábra

A nyugdíjformula meredeksége a csoportok  $\varepsilon$  paraméterbeli különbségeinek ( $\Delta\varepsilon$ ) függvényében



3. ábra

A nyugdíjformula meredeksége a csoportok élettartambeli különbségeinek ( $\Delta D$ ) függvényében



értékes jegyet biztosít, amely számítási pontossággal a következő vizsgálatokban megelégszünk.

A következő numerikus vizsgálatokkal azt kívánjuk bemutatni, hogy a modell feltevései mellett a naiv nyugdíjformula használata mindig „élesebb” ösztönzést jelent, mint az exponenciális (ezen állításra alapozva javasolható a naiv formula tompítása). Tapasztalataink szerint az egyes formulák meredeksége ( $\alpha$ ), csak az egyes csoportokat jellemző paraméterek különbségétől függ. Ha minden csoport paramétere megegyezik (csak egy csoport van), akkor természetesen minden formulával ugyanazt a meredekséget kapjuk. Viszont akár az  $\varepsilon$ , akár a  $D$  paraméterbeli különbségeket kezdjük el növelni, az exponenciális formula tompább lesz a naiv formuláknál. Ezt a jelenséget mutatjuk be a 2. és a 3. ábrákon.

Számításainkban ismét kilenc csoportot alkalmaztunk, méghozzá úgy, hogy a középső csoport  $(\varepsilon_a, D_a) = (0,35, 50)$  paramétereit rögzítettük, míg a szélső csoportok paramétereit az  $(\varepsilon_a \pm \Delta\varepsilon, D_a \pm \Delta D)$  összefüggésnek megfelelően választottuk meg [így  $(\Delta\varepsilon, \Delta D) = (0,03, 5)$  esetén visszkapjuk az előző szakaszban tárgyalt esetet]. A 2. és a 3. ábrákon O ponttal jelölt állapot a  $(\Delta\varepsilon, \Delta D) = (0, 0)$  esetnek felel meg. Ebből az állapottól kiindulva először  $\Delta\varepsilon$  értékén növeltük fokozatosan 0,003-ig, majd  $\Delta D$  értékét 5-ig, majd visszafelé, először ismét  $\Delta\varepsilon$  értékét, majd  $\Delta D$  értékét csökkentettük 0-ra, miközben megfigyeltük a formulák meredekségét ( $\alpha$ -t).

A három ösztönzési függvény meredekségét összehasonlítva valóban megállapíthatjuk, hogy az exponenciális formulát alkalmazva sokkal tompább ösztönzést kapunk, mint a naiv esetben. A csoportok közötti különbségek növelésével megfigyelhető, hogy a naiv formula egyre „élesebb”, és az exponenciális formula egyre „tompább” lesz, miközben a kiigazított naiv formula meredeksége stabilnak mondható. Azt is megfigyelhetjük, hogy ha a csoportok élettartama között nincs különbség, akkor a két naiv formula ugyan azt a rendszert definiálja, vagyis a naiv formula kiigazítására csak akkor van szükség, ha a csoportok egymástól az  $\varepsilon$  paraméterben (szorgalomban) is különböznek.

## Összefoglalás

A numerikus módszerek hatékony alkalmazásával még bonyolult feladatok esetében is gyorsan értékes információhoz juthatunk, amely különösen hasznos lehet például a modell alapvető viselkedésével, jellegzetességeivel való ismerkedés folyamán. Kevésbé hatékony módszereket alkalmazva viszont a numerikus módszerek sokat veszíthetnek értékükből; nem elsősorban azért, mert (akár csak néhány nagyságrenddel) megnövelik a számítási hibákat, hanem azért, mert a hibák növekedésénél jóval nagyobb ütemben rombolják le a numerikus eredményekbe vetett bizalmunkat, ezáltal az illusztrációk szintjére süllyesztve a teljes numerikus apparátust. Ez különösen azért veszélyes, mert az irodalomban is csak numerikusan számolt eredmények jelennek meg a modellezésnek szóban forgó szakaszában, ugyanakkor nemcsak a hibaszámítás, de az alkalmazott numerikus módszerről is hallgatnak a szerzők. Véleményünk szerint, ha mást nem, a számítások megbízhatóságát szem előtt tartva legalább az alkalmazott numerikus módszer méltó lenne az említésre.

Bemutattunk egy nyugdíjösztönzési problémát és ennek egy lehetséges, hatékony numerikus megoldását, amelynek elvégeztük a teljes hibaanalízisét. Ezáltal sikerül a numerikus eljárást úgy beállítani, hogy az eredményváltozók hibái a megkívánt szint alá süllyedjenek. Ezek után már megvizsgálhattuk *Simonovits* [2003] által felvetett kérdést, miszerint a nyugdíjformulán, a biztosításmatematikailag korrekt nyugdíjformulához képest kell-e változtatni a jelenlévő aszimmetrikus információ jelensége miatt. A numerikus vizsgá-

lataink alapján, a válasz igen, méghozzá egyértelműen tompítani érdemes a formulán, továbbá a tompítás mértéke annál nagyobb, minél nagyobbak a csoportok közötti különbségek (élettartamban vagy szorgalomban).

### *Hivatkozások*

- DIAMOND, P.–MIRRELES, J. [1978]: A Model os Social Insurance with Variable Retirement. *Journal of Public Economics*, 10. 295–336. o.
- DIAMOND, P. [2003]: *Taxation, Incomplete Markets and Social Security*. Munich Lectures. MIT Press, Cambridge MA.
- ESŐ PÉTER–SIMONOVITS ANDRÁS [2003]: Optimális járadékfüggvény tervezése rugalmas nyugdíj-rendszerre. *Közgazdasági Szemle*, 2. sz. 99–111. o.
- FABEL, O. [1994]: *The Economics of Pensions and Variable Retirement Schemes*. Wiley, New York.
- GÖMÖRI ANDRÁS [2001]: *Információ és interakció*. Typotex, Budapest.
- GRUBER, J.– WISE, D. A. (szerk.) [1999]: *Social Security and Retirement Program Around the World*. *Journal of Pension Economics and Finance*, Chicago University Press, Chicago.
- SALANIÉ, B. [1994]: *The Economics of Contracts*, The MIT Press, Cambridge.
- SIMONOVITS ANDRÁS [2002]: *Nyugdíjrendszerek: tények és modellek*. Typotex, Budapest.
- SIMONOVITS ANDRÁS [2003]: Designing optimal linear rules for flexible retirement, PEF, Vol. 2. No. 3. november, 273–293. o.
- STOYAN, G.–TAKÓ GALINA [1993]: *NuMeRiKus módszerek*. ELTE–Typotex, Budapest.
- WALDRON, H. [2001]: Links between early retirement and mortality. ORES Working Paper, 93, Division of Economic Research, SS Administration.