Közgazdasági Szemle, XLIX. évf., 2002. november (905–927. o.)

RADNAI MÁRTON

Árazási hiba a határidős indexpiacokon

Ha a magyar tőkepiac tökéletes lenne, a BUX határidős áraknak a BUX azonnali értékénél az időarányos kockázatmentes kamattal kellene magasabbnak lenniük. A BUX határidős kontraktus bevezetése (1995. március) óta eltelt időben azonban ez az összefüggés általában nem állt fenn – a határidős árak különösen a bevezetés utáni években jelentősen eltértek az elméleti értékektől. Ez a jelenség (az úgynevezett árazási hiba) nem egyedi, a nemzetközi szakirodalomban számos példát találhatunk ugyanerre más határidős indexkontraktusok esetében is. Bár több szerző is a piaci tökéletlenségeket, elsősorban az értékpapír-kölcsönzés intézményének hiányát nevezi meg a jelenség kiváltó okaként, egyikük sem ad választ arra a kérdésre, hogy milyen egyensúlyi összefüggések állnak fenn a leggyakoribb problémák (hitelfelvételi vagy értékpapír-kölcsönzési korlátok) esetén. Cikkünkben egy ilyen modellt építünk és teszteljük, valamint statisztikailag elemezzük a határidős BUX kontraktus árazási hibáját.*
Journal of Economic Literature (JEL) kód: G13, G11

A tőzsdeindexekre[1] vonatkozó határidős szerződéseket[2] 1982-ben az Egyesült Államokban vezették be először. Bevezetésük előtt sokakat foglalkoztatott a kérdés, hogy hogyan határozható meg a tőzsdeindex egyensúlyi határidős ára.

A kérdés igen könnyen megválaszolhatónak tűnt annak az elvnek a felhasználásával, hogy hatékony piacon nincs arbitrázs. Tekintsünk el az osztalékfizetéstől, és tegyük fel, hogy a betéti és hitelkamatláb állandó és egyenlő. Az a befektető, aki az index összetételével azonos arányban megvásárolja a benne szereplő részvényeket, és eladja az indexet határidőre, egy olyan pozíciót hoz létre, aminek értéke a határidős kötés lejáratakor biztosan a határidős kötés ára. Egy ilyen pozíció tulajdonképpen egy olyan kockázatmentes kötvénnyel egyenértékű, amely a futamidő végén éppen a határidős árat fizeti ki.

Mivel a befektetőnek mindegy, hogy megveszi az indexportfóliót és eladja határidőre a határidős árfolyamon, vagy vesz egy kockázatmentes kötvényt, a határidős árnak ép-

* Köszönettel tartozom értékes megjegyzéseiért és bírálatáért *Berlinger Edinának*, *Király Júliának, Kóbor Ádámnak, Móricz Dánielnek*, *Sulyok-Pap Mártának*, *Szatmári Alexandrának, Száz Jánosnak*, *Zsemberi Leventének, Zalai Ernőnek* és a cikkről rendezett szakmai viták valamennyi résztvevőjének.

[1] A tőzsdeindex a tőzsdén forgó részvények egy csoportja árának súlyozott átlaga (általában egy konstanssal szorozva, hogy nagyságrendje a részvényárakhoz hasonló legyen). Az árak súlyozása sokféleképpen történhet, leggyakrabban a tőzsdei kapitalizáció alapján, vagyis a tőzsdére az adott részvényből bevezetett részvények összértékével súlyozzák őket. Részletesebben lásd *Ábel–Sándor* [1992] és *Fazakas* [1992] műveit.

[2] A határidős szerződés két fél között egy értékpapír előre rögzített, jövőbeli időpontban és előre rögzített áron történő adásvétele. Például 2002 júniusában két cég megállapodik, hogy az eladó a vevőnek 2002. szeptember 15-én 6000 forintért elad 100 részvényt. A vevő akkor nyer, ha 2002 szeptemberében az aznapi ár magasabb 6000 forintnál, az eladó pedig akkor, ha alacsonyabb.

Radnai Márton a Budapesti Közgazdaságtudományi és Államigazgatási Egyetem PhD-hallgatója.

pen annyival kell magasabbnak lenni az index mai értékénél, mint az időarányos kockázatmentes kamat – különben arbitrázstevékenység lép fel.[3]

Ezt az érvelést először *Cornell–French* [1983*a*] használta a határidős ár meghatározására. Modelljükbe bekapcsolták a tranzakciós költségek (brókeri jutalékok az azonnali és a határidős piacokon, illetve a vételi és eladási árfolyamok eltérése) jelenlétét is. Ebben az esetben az elméleti ár körül egy úgynevezett *semleges sáv* alakul ki, amelyen belül a határidős ár szabadon mozoghat anélkül, hogy lenne arbitrázs, mivel a költségek a teljes nyereséget elvinnék.

A határidős S&P 500 kereskedésének megkezdése utáni időszakban (1982 és 1984 között) azonban az árak nem a modell előrejelzéseinek megfelelően alakultak, hanem azoktól alaposan eltértek, és a különbség tartósan nagyobb volt annál, amit a tranzakciós költségekkel meg lehetett magyarázni. A valóságban ugyanis a határidős index értéke az azonnali indexérték alatt volt (ami csak negatív kockázatmentes kamatláb esetén létezhet, ha nincs arbitrázs). Az árazási hiba[4] (amit az elméleti ár és az aktuális ár százalékos eltéréseként definiálunk) autokorrelált volt, és a lejárat közeledtével fokozatosan csökkent.

Cornell–French [1983*a*] a diszkont tartós fennmaradását azzal magyarázták, hogy az arbitrázspozíció két oldalán, vagyis az indexportfólión és a határidős kötésen elért nyereség eltérő módon adózik. A portfólión elért nyereség csak abban a pillanatban adózik, amikor a portfóliót eladja tulajdonosa, míg a határidős eladáson elért nyereséget, illetve veszteséget a napi elszámolás miatt minden nap könyvelik. Ha egy arbitrázspozíció tehát átnyúlik a következő adózási évre, és az indexportfólión veszteség van, a befektetőnek most le kell adóznia egy olyan nyereséget, amit jövőre, a pozíció lezárásakor egy kisebb, de jelentős veszteség fog ellentételezni. Az ügyletben ezért egy bújtatott úgynevezett *adóidőzítési* opció van.

Ezt az érvet *Figlewski* [1984*a*] két irányból is támadta. Egyrészt az adókulcsok nem egyenlők minden piaci szereplő számára, így az adóidőzítési opciót is különböző mértékben értékelik (aki nem fizet adót, mert például veszteséges, az nem értékeli semennyire – sőt, ha a diszkont emiatt állna fel, ez a szereplő biztos nyereségre tehetne szert egy ilyen ügylettel). Másrészt a befektetők sohasem említették ezt az opciót azok között a tényezők között, amelyek döntéseikre hatással vannak. Figlewsky más magyarázattal szolgált: szerinte a diszkontok fő oka az új piaccal kapcsolatos ismeretek hiánya és az arbitrázslehetőségekre csak lassan reagáló intézmények voltak.

Számos további cikk próbálta az árazási hibát megmagyarázni – a legtöbben piaci tökéletlenségek jelenlétét bekapcsolva az elemzésbe. *Modest–Sundaresan* [1983] szerint a diszkontok fő oka a kölcsönzött értékpapír eladásakor *(short selling)*[5] fellépő akadályok voltak. Néhány piaci szereplő számára ugyanis az eladott részvényekből befolyó bevétel csak egy része volt felhasználható, így az arbitrázs költségei tovább nőttek (kamatveszteségeket szenvedtek). *Gould* [1988] bemutatta, hogy a semleges sáv tovább nő, ha a betéti és hitelkamatlábak eltérők. *Brennan–Schwartz* [1990] azt bizonyították be, hogy az is a semleges sáv szélesedéséhez vezet, ha a határidős piacon a szereplőknek pozíciós limiteik vannak (például meg van határozva az a legnagyobb vételi vagy eladási pozíció, amit egy befektető vagy bróker a határidős indexekből felhalmozhat).

[3] Ezt az arbitrázst az angolszász gyakorlatban *Cash and Carrynek* nevezik. Magyarul *Vedd és vidd* arbitrázsnak fordíthatnánk.

[4] A angol nyelvű szakirodalomban általánosan használt *mispricing* kifejezést a cikkben árazási hibának nevezzük. Definíciója $M_t = \frac{F_T^a - F_T}{F_T}$, ahol F_T^a az aktuális, F_T pedig az elméleti határidős ár.

[5] Ez azt jelenti, hogy valaki olyan értékpapírt ad el, amely nincs a tulajdonában. A (nemzetközi) gyakorlatban ez értékpapírok kölcsönkérésével valósítható meg, amiért a kölcsönadó jutalékot számít fel.

Néhány tanulmány azonban arra is rámutatott, hogy vannak olyan tényezők, amelyek csökkentik a semleges sáv szélességét. *Merrick* [1989] megmutatta, hogy ha az árazási hiba előjele változik, az arbitrázspozíciót érdemes megszüntetni (és esetleg a másik irányba átfordítani) a határidős kötés lejárata előtt. Ez egy opció, amellyel az arbitrázs végrehajtója élhet, így ennek értéke van. Ha például valaki egy arbitrázspozíciót azért nyit, mert mondjuk pozitív az árazási hiba (tehát a határidős ár magasabb, mint elméletileg indokolt lenne), biztos profitot ér el, ha a pozíciót lejáratig megtartja. Ha azonban az árazási hiba lejárat előtt előjelet vált, a profitot korábban beszedheti, illetve ha a pozícióját megfordítja, még növelheti is. Az arbitrázs ezért egy kicsit hasonlít egy amerikai típusú vételi opcióra. *Brennan–Schwartz* [1990] próbálták meg értékelni ezt az opciót a már említett korlátozott pozíciós limit modelljükkel (egy exogén, autoregresszív folyamatot feltételezve az árazási hiba mozgására). Sajnos azonban az exogén sztochasztikus folyamat feltételezése nem reális, hiszen az opció értéke hatással van arra, hogy milyen széles a semleges sáv (minél többet ér az opció, annál keskenyebb), az pedig visszahat az árazási hiba nagyságára. Ennek az opciónak az értékelése ezért komoly nehézségekbe ütközik.

A témával foglalkozó empirikus tanulmányok közül az egyik legátfogóbb *MacKinlay–Ramaswamy* [1988] cikke, akik szintén az S&P 500 indexre kötött határidős kötések áraiban található árazási hibát elemezték. Cikkükben az árazási hibát három tényezőnek tulajdonítják: a már említett osztalékbecslésből és az index nem tökéletes fedezéséből adódó kockázat mellett említik a kamatlábak változásából adódó kockázatot is. A napi nyereség–veszteség elszámolás miatt a tőzsdei határidős szerződések ára ugyanis csak akkor egyezik meg a tőzsdén kívüli határidős szerződések árával, ha a finanszírozási kamatláb alakulása független az index hozamának alakulásától (részletes bizonyítását lásd: *Cox–Ingersoll–Ross* [1981] cikkében).

A vizsgálatba az 1983 szeptembere és 1987 júniusa között lejáró határidős kötéseket vonták be,[6] napon belüli adatokat vizsgálva (szándékosan kihagyták tehát a *Figlewski* [1984*a*] által elemzett, 1982–1983-as időszakot, amikor az arbitrázslehetőségek a legnagyobbak voltak). Megállapították, hogy a határidős árak változékonyabbak, mint az azonnali árak, valamint hogy az árazási hiba a lejárat közeledtével csökken, és autokorrelált. Az előbbit az arbitrázsstratégiákban rejlő kicsi, de el nem hanyagolható kockázatoknak, míg az utóbbit annak tulajdonították (Merrickhez hasonlóan), hogy az arbitrazsőrök korábban zárják pozícióikat, mint hogy az árak a semleges sáv másik széléig elmennének, így hozzájárulnak az árazási hiba előjelének megmaradásához. Végül pedig azt találták, hogy az árazási hiba a piac „érésével” párhuzamosan átlagosan egyre alacsonyabb lett, egy idő után pedig tartósan a semleges sávban maradt. A későbbi kontraktusok esetén az árazási hiba abszolút értéke továbbra is csökkent a lejárat közeledtével, de ez a trend egyre gyengébbé vált.

A határidős indexkontraktusok nemzetközi elterjedésével párhuzamosan kiderült: a bevezetés utáni időszakok kínálta arbitrázslehetőségek nem kizárólag az S&P 500 esetében jelentkeztek.

Ugyanilyen érési folyamat játszódott le a Nikkei 225 indexre vonatkozó határidős kötések esetében is. *Brenner–Subrahmanyam–Uno* [1989] a kereskedés megkezdése utáni időben jelentős árazási hibát találtak. Eredményeiket *Lim* [1992] módszertani okok miatt kritizálta (a használt azonnali és határidős árak közötti 15 perces különbség nem hanyagolható el, kicsi a likviditás), azonban az eltérő minta miatt következtetéseiket nem cáfolta meg. Későbbi cikkükben azonban *Brenner–Subrahmanyam–Uno* [1990] már arról adnak hírt, hogy az első két év után az árazási hiba jelentős mértékben csökkent.

[6] A határidős kötések lejáratai a legtöbb tőzsdén szabványosítva vannak, a lejárati határidők általában március, június, szeptember és december egy-egy előre meghatározott napja.

Yadav–Pope [1990], [1994] az angol FTSE-100 azonnali és határidős árait vizsgálták, és arra a következtetésre jutottak, hogy az árazási hiba létezett, de jelentősen csökkent a „Big Bang”, azaz az angol tőkepiac 1986-os liberalizálását követően. *Bühler–Kempf* [1995], *Kempf* [1998] a DAX, a német tőzsdeindex, *Puttonen–Martikainen* [1991], *Puttonen* [1993] a Helsinki tőzsdeindex, *Fung–Draper* [1999] a Hang Seng index esetében végzett vizsgálatokat. Minden tanulmány árazási hibákat tapasztalt a kereskedés megkezdése utáni periódusban.

Bár általánosan elfogadott nézet az, hogy hosszú távon az árazási hiba a tranzakciós költségek által indokolt sávon belül marad, valamint az, hogy a kezdeti árazási hibákat a piaci tökéletlenségek okozzák, érdekes, hogy a tanulási, érési folyamatok között igen nagy hasonlóságok találhatók. Mindez annak ellenére van így, hogy az intézményi keretek ez egyes piacok esetében igen eltérők. Nem érdektelen ezért egy olyan modellt felállítani, amely ezt az érési folyamatot modellezi úgy, hogy figyelembe veszi a leggyakoribb piaci tökéletlenségeket.

A tanulmány célja kettős: egyrészt, hogy egy egyszerű modellt építsen, amely magyarázatul szolgál a kezdeti árazási hibákra, másrészt pedig hogy tesztelje ezt a modellt, és elemezze a BUX – a Budapesti Értéktőzsde indexe – határidős árának alakulását a kereskedés megkezdése óta.

A cikk felépítése a következő: először különböző feltételezések mellett meghatározzuk a határidős kötések elméleti árát és definiáljuk az árazási hibát. Majd egy egyszerű modellt építünk az árazási hiba magyarázatára. Ezt követően a magyar intézményi kereteket vizsgáljuk. Az utolsó előtti fejezetben található a határidős árak empirikus elemzése: áttekintjük az árazási hiba alakulásának statisztikai jellemzőt, valamint teszteljük modellünket. A cikket végül a következtetések megfogalmazásával zárjuk.

Az irodalomban található elméleti modellek áttekintése

Elméleti ár és az árazási hiba

Először a határidős kontraktusok elméleti árát és az árazási hiba mértékét határozzuk meg a tranzakciós költségekre tett különböző feltételezések mellett. Most és a későbbi modellekben nem teszünk különbséget a *forward* és a *futures* szerződések között – a futures szerződéseket úgy modellezzük, mintha forward szerződések lennének. Ez minden olyan esetben igaz például, ha a kamatláb az idő determinisztikus függvénye, vagy a finanszírozási kamatláb független az index hozamának alakulásától (részletesebben lásd *Cox–Ingersoll–Ross* [1981] cikkét).

Tegyük fel, hogy nincsenek tranzakciós költségek, a betéti és hitelkamatlábak egyenlők (és állandók), valamint az indexben lévő részvények súlyait osztalékfizetéskor úgy korrigálják, mintha a teljes osztalékot visszaforgatnánk az adott részvénybe. Ez azt jelenti, hogy ha egy részvény súlya az indexben eredetileg 5 százalék, és a kibocsátó a részvény árának 10 százalékát fizeti ki osztalékként, súlya ezentúl 5,5/100,5 = 5,47 százalék lesz.[7] Ez azért szükséges, mert így biztosítható, hogy az index értéke az osztalékfizetéskor ne változzék (hatékony piacon minden mást változatlannak tekintve ugyanis osztalékfizetéskor a részvény ára az osztalék mértékével csökken). Tegyük fel emellett, hogy az index súlyozását úgy korrigálják a részvények felaprózásakor, illetve tőkeemeléskor, hogy ezek se legyenek hatással az index értékére.

[7] A BUX számításához is ezt a módszert alkalmazzák.

Ebben az esetben a határidős ár [8]

$$F_T = S_t(1 + r(T - t)), \tag{1}$$

ahol T a lejárat időpontja, t pedig a jelenlegi időpont évben kifejezve, F_T a T-edik időpontra vonatkozó határidős ár, S_t a t-edik időpontban érvényes indexérték ($t \leq T$), r pedig a kockázatmentes hitel kamata éves szinten (lineáris kamatszámítással számítva). Ennek bizonyítására tekintsük a következő két portfóliót: az A portfólióban egy indexportfólió, a B portfólióban pedig $F_T/[1 + r(T - t)]$ kockázatmentes kötvény és egy T határidőre kötött határidős vételi szerződés van. A két portfólió értéke a két időpontban:

Portfólió	Értékpapír	t	T
A	1 indexportfólió	S_t	S_T
$B1$	$F_T/[1 + r(T - t)]$ kockázatmentes kötvény	$F_T/[1 + r(T - t)]$	F_T
$B2$	1 határidős vételi szerződés	0	$S_T - F_T$
$B = B1 + B2$		$F_T/[1 + r(T - t)]$	S_T

Van tehát két portfóliónk, amelyek értéke T időpontban biztosan megegyezik. Ha nincs arbitrázs, akkor értéküknek t időpontban is meg kell egyezniük. Ebből pedig átrendezéssel (1) következik.

Tegyük föl most, hogy az indexet nem igazítják ki osztalékfizetéskor a fent leírt módon, hanem a súlyok változatlanok maradnak, és az osztalékfizetés mértékét előre biztosan ismerjük. Ekkor az indexbe fektetett összeg értékét csökkenteni kell a később a részvényekből kapott osztalékok jelenértékével, hogy T időpontban a portfóliónk az index értékével legyen egyenlő. A határidős ár ebben az időpontban ezért

$$F_T = S_t(1 + r(T - t)) - \sum_{j=1}^{m}(1 + r(T - t_j))D_j, \tag{2}$$

ahol D_j az indexportfólióra t_j időpontban fizetett osztalék összege ($t_j \leq T$). Ilyen index például a londoni értéktőzsde indexe, a FTSE. A továbbiakban ilyen indexekkel nem, hanem csak olyanokkal foglalkozunk, ahol az elméleti árat az (1) összefüggés határozza meg.

Az árazási hiba az így meghatározott elméleti érték és az éppen aktuális határidős ár százalékos eltérése. *Bühler–Kempf* [1995] és *Brenner–Subrahmanyam–Uno* [1989] cikkeihez hasonlóan a következő módon definiáljuk az árazási hibát:

$$M_t = \frac{F_T^a - F_T}{F_T}, \tag{3}$$

ahol F_T^a az aktuális, F_T pedig az elméleti határidős ár. Megjegyezzük, hogy az irodalomban az árazási hiba definíciója nem mindig ez – néhány esetben a nevezőben S_T, vagyis a jelenlegi indexérték található (lásd például *MacKinlay–Ramaswamy* [1988] és *Yadav–Pope* [1994] cikkeit).

[8] A könnyebb áttekinthetőség és a konzisztencia miatt az elméleti levezetésekben következetesen lineáris kamatozást alkalmazunk. Mivel a likvid határidős kötések lejárata legtöbbször éven belüli, ez a piacon alkalmazott gyakorlatot is követi. Az összefüggések természetesen folytonos kamatszámítás esetén is érvényesek maradnak.

Semleges sáv

Piaci tökéletlenségek (például tranzakciós költségek, eltérő vételi és eladási árfolyamok, az arbitrázs hatására elmozduló árfolyamok) esetén lehetséges, hogy nem érdemes arbitrázst végrehajtani akkor sem, ha a határidős ár eltér az elméleti értéktől. Az elméleti ár körül kialakul egy semleges sáv, amelyben a határidős ár anélkül mozoghat, hogy elindítaná az arbitrázstevékenységet.

Ennek a sávnak a szélességét az irodalomban hagyományosan úgy határozzák meg, hogy feltételezik, hogy a legkisebb költséggel rendelkező piaci szereplő ki tudja használni az összes arbitrázslehetőséget, és hogy ennek a szereplőnek a tranzakciós költségei az indexértékkel arányosak. Jelölje a tranzakciós költségek (brókerjutalékok, vételi, illetve eladási árfolyamok eltérése a középárfolyamtól) indexértékhez viszonyított arányát $\tau > 0$. Ebben az esetben (újra feltételezve, hogy az indexet osztalékfizetés esetén kiigazítják) nincs arbitrázs, ha

$$S_t(1-\tau)(1+r(T-t)) \le F_T^a \le S_t(1+\tau)(1+r(T-t)) \tag{4}$$

$$-\tau \le \frac{F_T^a - F_T}{F_T} \le \tau, \tag{5}$$

ami azt jelenti, hogy az árazási hiba alsó és felső korlátja állandó, vagyis a semleges sáv szélessége is (ha a határidős ár százalékában fejezzük ki). Amennyiben fix tranzakciós költségek is vannak, a semleges sáv szélessége természetesen a tranzakcióméret növekedésével csökken.

Gould [1988]-hoz hasonlóan tegyük föl most azt is, hogy a tranzakciós költségek mellett a hitelfelvételi és betéti kamatlábak is eltérnek. Legyen a hitelfelvétel kamatlába $r_a = r + s$, a betéti kamatláb pedig $r_b = r - s$. Ebben az esetben akkor nincs arbitrázs, ha

$$S_t(1-\tau)(1+(r-s)(T-t)) \le F_T^a \le S_t(1+\tau)(1+(r+s)(T-t)) \tag{6}$$

$$\frac{(1-\tau)(1+(r-s)(T-t))}{1+r(T-t)} - 1 \le \frac{F_T^a - F_T}{F_T} \le \frac{(1+\tau)(1+(r+s)(T-t))}{1+r(T-t)} - 1. \tag{7}$$

A két oldalt közelítve [kihasználjuk, hogy $1 + r(T - t) \approx 1$, ha $r(T - t)$ kis pozitív szám, és a keresztszorzatokat nagyságrendjük miatt elhagyjuk]

$$-\tau - s(T-t) \le \frac{F_T^a - F_T}{F_T} \le \tau + s(T-t). \tag{8}$$

Ebben az esetben a semleges sáv szélessége az idő előrehaladtával csökken.

Modell tőke- és rövidre eladási korlátok esetére

Az arbitrázs kínálata

A következőkben a portfólióválasztási döntések elemzésénél ismert CAPM (tőkepiaci árfolyamok elmélete) modell[9] módszertana alapján mutatjuk be a racionális piaci szereplőket feltételezve azt, hogy miért is alakulhatnak ki arbitrázslehetőségek. Megközelítési módunk hasonló *Gressis és szerzőtársai* [1984] cikkéhez, azonban ők csak annyit bizonyítottak be, hogy tökéletes piacok esetén az implicit kamatláb egyenlő a kockázatmentes

[9] Összefoglalását lásd *Makara* [1994].

hozammal. Mi ezzel szemben nem tökéletes piacokat, hanem éppen hogy olyan piacokat vizsgálunk, ahol a befektetők nem tudnak hitelt felvenni vagy értékpapírt rövidre eladni.

Tekintsünk egy egyperiódusú gazdaságot, amelyben négyféle értékpapír[10] van: kockázatmentes értékpapír, tőzsdeindex, az indexre szóló határidős vételi és határidős eladási (futures) szerződés (a határidő a periódus vége). Első látásra feleslegesnek tűnik, hogy a határidős vételt és eladást külön értékpapírként kezeljük, de mint majd meglátjuk, ennek oka az, hogy modellünkben a két papír hozama nem lesz egymás ellentettje.

A négy értékpapír hozama valószínűségi változó. Mindegyik értékpapír teljesen jellemezhető hozamának várható értékével és szórásával, amely előre ismert és véges, valamint ismert bármely két-két értékpapír hozamának kovarianciája is, amely szintén véges.

A kockázatmentes kamatláb a modellben konstans, nem sztochasztikus változó.[11] A hagyományokat követve ezért a kockázatmentes értékpapír hozamának várható értéke r, szórása 0, a tőzsdeindexé pedig μ és σ (a hozam definíciója $h = \frac{S_1 - S_0}{S_0} = \frac{S_1}{S_0} - 1$, ahol S_1 az értékpapír jövőbeli, S_0 pedig a jelenlegi értéke). Ezek a várható értékek a határidős piacon részt vevő befektetők várakozásait jellemzik, amelyekről feltesszük, hogy azonosak, viszont nem feltétlenül egyeznek meg az azonnali piacon részvevő befektetők várakozásaival, ezért elképzelhető, hogy $\mu < r$.

A határidős vételi szerződés esetén tegyük fel, hogy a határidős ár az index jelenlegi árához képest f hozamot biztosít (ez az úgynevezett implicit vagy más néven belső kamatláb, amivel a későbbiekben részletesen foglalkozunk), vagyis $F = S(1 + f)$, ahol S az index jelenlegi, F pedig a határidős ára.

A futures szerződéseknek van egy nagyon fontos tulajdonságuk: a vételkor nem kell befektetni a teljes vételárat, hanem csak annak néhány százalékát. A határidős tőzsdéken úgynevezett napi elszámolás keretében az ügyfél számláján a tőzsde naponta elszámolja a keletkezett nyereséget, illetve veszteséget. Ha például valaki 8000 ponton vesz 1 kontraktus BUX-ot 2002. decemberi határidőre, és másnap a határidős ár felmegy 8100 pontra, számláján 10 000 forintot írnak jóvá (egy kontraktus névleges értéke 100 forint szorozva a BUX határidős értékével, azaz 800 000 forint), ha lemegy 7950 pontra, számlájáról levesznek 5000 forintot. A kezdetben befizetendő összeg (mely jelenleg kontraktusonként 40 000 forint, vagyis a határidős indexérték mintegy 5 százaléka) a jövőbeli napi veszteségek kiegyenlítésére előre beszedett biztonsági fedezet – amelyet van, ahol csak készpénzben, van, ahol pedig állampapírban is elfogadnak.

A következőkben feltesszük, hogy fedezetként szerződéskötéskor az index jelenlegi árának m százalékát kell letenni (jelenleg $m = 5$ százalék), a pozíció elszámolása pedig a periódus végén történik. Ekkor, amennyiben a letétet csak készpénzben fogadják el, a határidős szerződés *ex post* hozama:

$$r_v = \frac{mS_0 + (S_1 - F)}{mS_0} - 1 = \frac{S_1 - F}{mS_0} = \frac{S_0(1 + r_I) - S_0(1 + f)}{mS_0} = \frac{r_I - f}{m}, \tag{9}$$

ahol r_I az index *ex post* hozama ($E(r_I) = \mu$), f pedig az implicit kamatláb, hiszen a pozíció a periódus végén a letéti összegnek és az akkori indexérték és határidős árfolyam különb-

[10] Az értékpapír fogalmát itt igen tág értelemben használjuk. Értékpapírnak tekintünk minden szerződést, amely pontosan meghatározza, hogy tulajdonosa mennyi pénzt kap az egyes időpontokban az egyes események (állapotok) bekövetkezése esetén.

[11] Könnyen belátható, hogy egyperiódusú modellben a forward és futures árfolyamok árfolyama még akkor is megegyezik, ha sztochasztikus és az index hozamától nem független kamatlábat feltételezünk – hiszen mindkét szerződés értéke nyitáskor nulla, lejáratkor pedig a spot és a kötési ár különbsége. Emellett az empirikus megfigyelések szerint a két változó közti korreláció igen kicsi. A sztochasztikus kamatláb bevezetése ezért feleslegesen bonyolítaná az elemzést.

ségének összege. A határidős vétel hozama tehát az index hozamának lineáris transzformációjával keletkezik. Amennyiben azonban a letétet kockázatmentes értékpapírban is elfogadják, a letét hozama az imént számítotthoz hozzáadódik (mivel az elszámolás a periódus végén történik, a letétbe történő befektetés a periódusban még a kockázatmentes kamatot hozza). Ekkor a határidős szerződés *ex post* hozama:

$$r_v = \frac{mS_0(1+r)+(S_1-F)}{mS_0} - 1 = \frac{S_1 - F + mS_0 r}{mS_0} =$$

$$= \frac{S_0(1+r_I) - S_0(1+f)}{mS_0} + r = \frac{r_I - f}{m} + r. \tag{10}$$

A továbbiakban feltételezzük, hogy a letétet kockázatmentes értékpapírban is el lehet helyezni. Hasonlóan a határidős eladás *ex post* hozama:

$$r_v = \frac{mS_0(1+r)+(F-S_1)}{mS_0} - 1 = \frac{S_0(1+f) - S_0(1+r_I)}{mS_0} + r = \frac{f - r_I}{m} + r. \tag{11}$$

Mint láthatjuk, ez nem a határidős vétel hozamának ellentettje – ezért kellett a határidős eladást külön értékpapírként szerepeltetni a modellben. Az eltérés oka az alapletét, amely mind a határidős vétel, mind pedig a határidős eladás esetén biztosítja a kockázatmentes hozamot.

A transzformációk alapján – a várható érték, kovariancia, és variancia azonosságait felhasználva – kiszámíthatjuk az egyes értékpapírok várható hozamait, szórásait és kovarianciáit[12] is, amelyet az *1.* és a *2. táblázat* tartalmaz.

1. táblázat

A modellben szereplő értékpapírok várható értéke és szórása

Megnevezés	Kockázatmentes	Tőzsdeindex	Határidős vétel	Hatatáridős eladás
Várható érték	r	μ	$(\mu - f)/m + r$	$(f - \mu)/m + r$
Szórás	0	σ	σ/m	σ/m

2. táblázat

A modellben szereplő értékpapírok kovarianciamátrixa

Megnevezés	Kockázatmentes	Tőzsdeindex	Határidős vétel	Hatatáridős eladás
Kockázatmentes	0	0	0	0
Tőzsdeindex		σ^2	σ^2/m	$-\sigma^2/m$
Határidős vétel			σ^2/m^2	$-\sigma^2/m^2$
Határidős eladás				σ^2/m^2

A befektető által választható határportfóliók halmazát a (12)–(15) feltételes szélsőérték feladat megoldása adja meg (a befektető pénzének az egyes értékpapírokba fektetendő része a, b, c és d)

[12] Például $cov\left(r_I, \frac{f - r_I}{m} + r\right) = cov\left(r_I, \frac{-r_I}{m}\right) = -\frac{cov(r_I, r_I)}{m} = -\frac{\sigma^2}{m}.$

$$\min_{a,b,c,d}[a \quad b \quad c \quad d]\Theta\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \min_{a,b,c,d}\sigma^2\left(b^2 + \frac{2bc}{m} - \frac{2bd}{m} - \frac{2cd}{m^2} + \frac{c^2}{m^2} + \frac{d^2}{m^2}\right) =$$

$$= \min_{a,b,c,d}\left[\sigma\left(b + \frac{c}{m} - \frac{d}{m}\right)\right]^2 = \min_{a,b,c,d}\left|\sigma\left(b + \frac{c}{m} - \frac{d}{m}\right)\right| \tag{12}$$

$$c \geq 0,\ d \geq 0 \tag{13}$$

$$a + b + c + d = 1 \tag{14}$$

$$ar + b\mu + c\left(\frac{\mu - f}{m} + r\right) + d\left(\frac{f - \mu}{m} + r\right) = \overline{R}, \tag{15}$$

ahol Θ a kovarianciamátrix. Ez azt jelenti, hogy a befektető adott várható hozam mellett a legalacsonyabb varianciát (és így szórást) kívánja elérni. A kovarianciamátrix szerencsés szerkezete miatt a célfüggvény egy lineáris függvény abszolút értéke.

Mivel a feladat adott hozam mellett a szórást minimalizálja, előfordulhat, hogy több olyan hozamszint is van, amely mellett egy bizonyos szórás a minimális. Ezek közül kiválasztva a legmagasabb hozamú pontot, kapjuk meg a hatékony portfóliók halmazát.

Nem tettünk kikötést eddig a és b előjelére. Négy esetet vizsgálunk meg.

1. Teljes a piac, tehát a befektető tud hitelt felvenni, valamint tud részvényt rövidre eladni. Ekkor egyik együtthatóra sem teszünk kikötést. Negatív előjelű kockázatmentes befektetés kockázatmentes hitelfelvételt, negatív indexbefektetés pedig az indexet képező értékpapírok rövidre eladását jelenti.

2. Van rövidre eladás, de nincs hitelfelvétel. Ekkor $a \geq 0$.

3. Nincs rövidre eladás, tehát a befektető tud hitelt felvenni, de nem tud részvényt rövidre eladni. Ekkor $b \geq 0$.

4. Nincs rövidre eladás, és kockázatmentes hitelfelvétel sincs. Ekkor $a \geq 0$, $b \geq 0$.

1. Ebben az esetben a kockázatmentes hitelből és az indexbe befektetett értékpapírból elő lehet állítani olyan szórású portfóliót, mintha valaki a teljes portfóliót határidős vételbe vagy eladásba fektetné. Ha ugyanis valaki felvesz $\frac{1}{m} - 1$ egység hitelt, és hozzátéve 1 egység vagyonát $\frac{1}{m}$ részvényindexet vesz ($a = -\frac{1}{m} + 1$, $b = \frac{1}{m}$, $c = 0$, $d = 0$), az így kialakított portfólió várható hozama $\frac{\mu - r}{m} + r$, szórása pedig $\frac{\sigma}{m}$ lesz. E portfólió és a határidős vétel közül csak a nagyobbik várható hozamú lehet hatékony (vagy mindkettő, ha hozamuk egyenlő), vagyis a befektető akkor választja a határidős vételt, ha

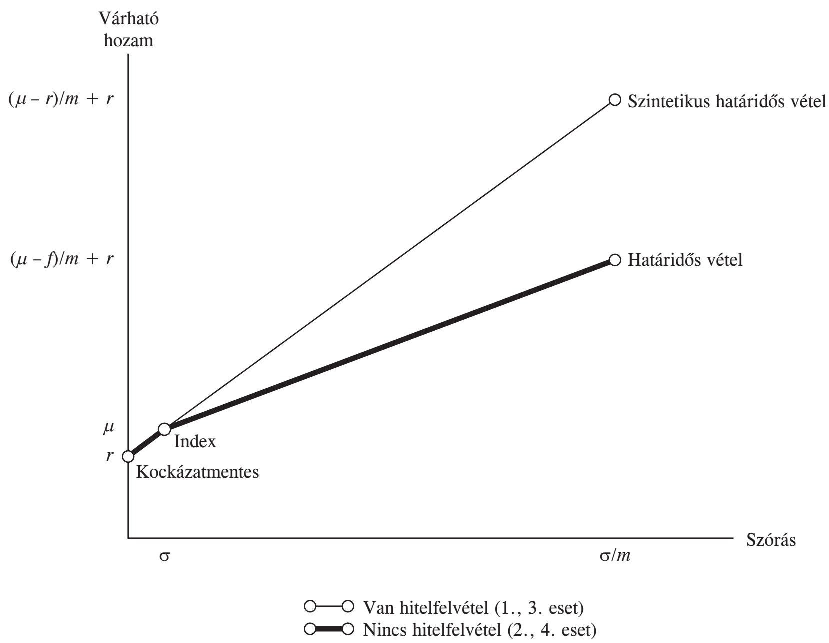
$$\frac{\mu - f}{m} + r \geq \frac{\mu - r}{m} + r \tag{16}$$

$$f \leq r. \tag{17}$$

Minthogy részvényt is tartanak a befektetők (és egy indexvétel összeállítható a portfólió $1 - m$ részének kockázatmentes értékpapírba, m részének pedig a határidős vételbe történő fektetésével),

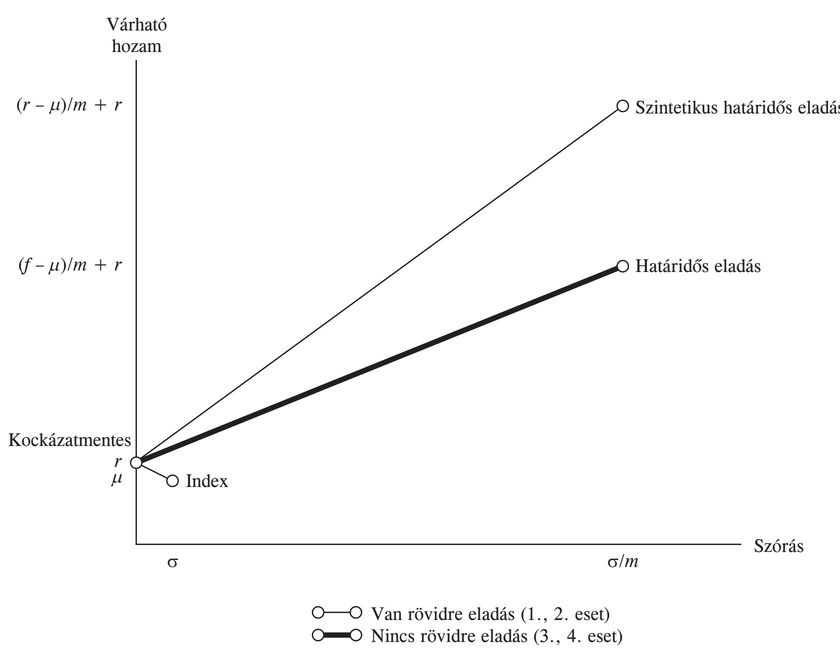
1. ábra

Hatékony portfóliók, amikor az index várható hozama magasabb a kincstárjegyénél



2. ábra

Hatékony portfóliók, amikor az index várható hozama alacsonyabb a kincstárjegyénél



$$m\left(r+\frac{\mu-f}{m}\right)+(1-m)r\le u \tag{18}$$

$$f\ge r. \tag{19}$$

Ez azt jelenti, hogy pontosan akkor fognak a piaci szereplők a határidős kötésbe és a részvénybe is befektetni, ha az implicit kamatláb a kockázatmentes kamatlábbal megegyezik.

A határidős eladás ($d > 0$) csak akkor része a hatékony portfólióknak, ha $r > \mu$. Ez természetesen piaci egyensúly nem lehet, de tükrözheti a befektetők egy részének várakozásait.

2. Amennyiben nincs hitelfelvétel, a befektető az index és hitel kombinálásával nem tud létrehozni olyan portfóliót, amelynek szórása megegyezne a határidős vételével. Ebben az esetben a határidős vétel mindaddig hatékony, ameddig a határidős vétel várható hozama nagyobb az indexénél, vagyis

$$\frac{\mu-f}{m}+r\ge\mu \tag{20}$$

$$(1-m)\mu+mr\ge f, \tag{21}$$

tehát ameddig az implicit kamatláb el nem éri az index várható hozama $(1 - m)$-szeresének és a kockázatmentes kamatláb m-szeresének összegét. Mivel a bal oldal szinte majdnem az index hozamával egyenlő (általában egy kicsit alacsonyabb, mivel $\mu \ge r$), egyszerűbb a felső korlátot az index hozamával közelíteni.

Mivel azonban az index továbbra is előállítható m rész határidős vételbe, és $(1 - m)$ rész kockázatmentes értékpapírba történő fektetésével, a korábbiak miatt $f \ge r$.

Amennyiben $\mu < r$, mivel van rövidre eladás, az alsó és a felső korlátra is az 1. pontban levezetettek érvényesek, vagyis $f = r$.

3. Ha nincs rövidre eladás, de hitel van, akkor a határidős vétel igen, a határidős eladás azonban nem állítható elő az indexből és a kockázatmentes értékpapírból. Ezért egyrészt ha $\mu \ge r$

$$f=r, \tag{22}$$

másrészt viszont ha $\mu < r$, a határidős eladás mindaddig hatékony, ameddig várható hozama nagyobb a kockázatmentes kamatlábnál

$$\frac{f-\mu}{m}+r\ge r \tag{23}$$

$$f\ge\mu. \tag{24}$$

Ugyanakkor, mivel van hitelfelvétel, az implicit kamatláb nem lehet magasabb a kockázatmentesnél, hiszen ekkor arbitrázs lenne, tehát

$$r\ge f. \tag{25}$$

4. Ebben az esetben sem a határidős vételt, sem a határidős eladást nem lehet szintetikusan előállítani az index és a kincstárjegy vételével. Ekkor (a 2. és 3. pontokból következően)

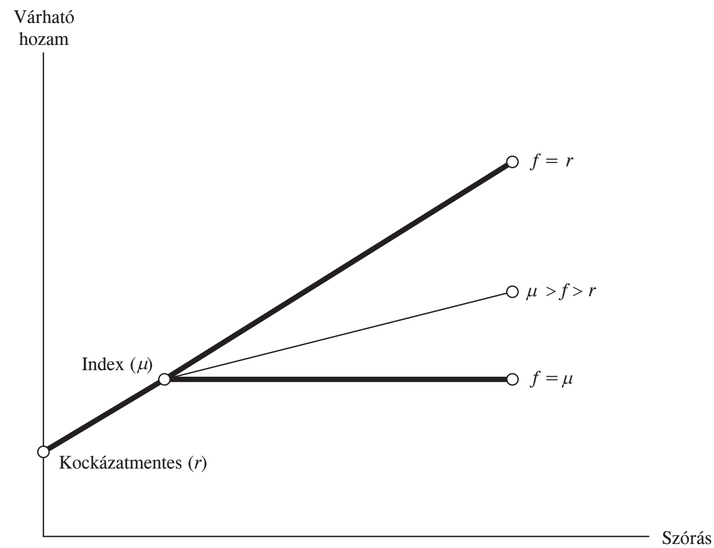
$$\mu\ge(1-m)\mu+mr\ge f,\quad \text{és}\quad f\ge r,\quad \text{ha}\quad \mu\ge r, \tag{26}$$

és

$$r\ge f\ge\mu,\quad \text{ha}\quad \mu<r. \tag{27}$$

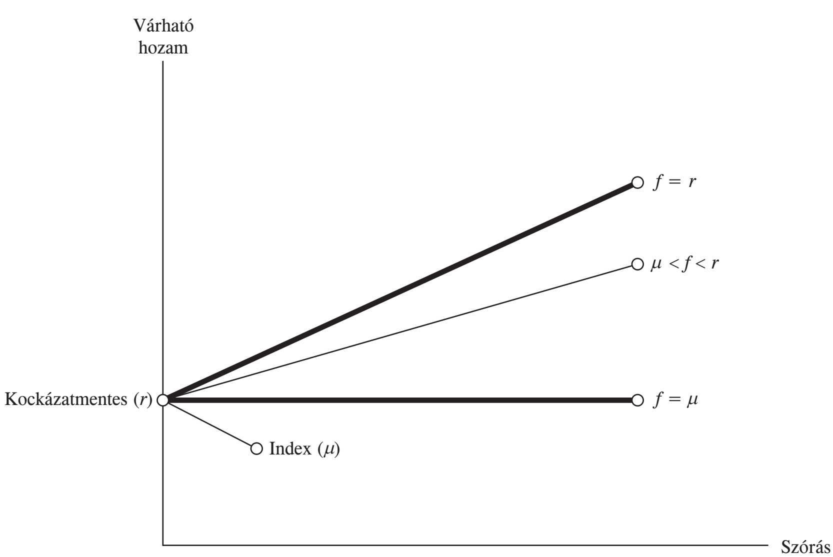
3. ábra

Az implicit kamatláb alsó és felső korlátja, ha az index várható hozama magasabb a kincstárjegyénél



4. ábra

Az implicit kamatláb alsó és felső korlátja, ha az index várható hozama alacsonyabb a kincstárjegyénél



Eredményeinket a *3. táblázatba* rendezhetjük össze (a táblázatban a felső korlátnál a gyengébbet tüntettük fel).

3. táblázat

A modell előrejelzései az implicit kamattartalomra az egyes esetekben

Hitelfelvétel	Rövidre eladás	$\mu \geq r$	$\mu < r$
Van	Van	$f = r$	$f = r$
Nincs	Van	$\mu \geq f \geq r$	$f = r$
Van	Nincs	$f = r$	$r \geq f \geq \mu$
Nincs	Nincs	$\mu \geq f \geq r$	$r \geq f \geq \mu$

Összefoglalásul megállapíthatjuk: ha nincs hitelfelvételre lehetőség, akkor az implicit kamatláb nagyobb lehet a kockázatmentesnél, de nem lehet nagyobb, mint az index várható hozama. Ha nincs rövidre eladás, az implicit kamatláb kisebb lehet, mint a kockázatmentes kamatláb, de legalább akkora, mint az index hozama. *Ha se rövidre eladás, se pedig hitelfelvétel nincs, az implicit kamatláb szabadon helyezkedhet el a kockázatmentes kamatláb és az indexportfólió hozama között.* Ez az eredmény igen erőteljes, hiszen független a letéti követelmény szintjétől. A befektetőkkel kapcsolatban pedig csak azt tételeztük föl, hogy két azonos várható hozamú értékpapír közül az alacsonyabb szórásút preferálják.

Mitől van tehát arbitrázs? *Attól, hogy vannak olyanok, akik szeretnének magas kockázatú portfóliót létrehozni, de nem tudnak hitelt felvenni vagy részvényt rövidre eladni.* Számukra akkor is előnyös határidőre venni részvényt, ha az implicit kamat nem egyezik meg a kockázatmentessel, hasznosságukat így is növelni tudják ahhoz képest, mintha teljes pénzüket csak a kockázatmentes értékpapírba és az indexbe fektethetnék.

Az árazási hiba fennállása esetén egy érdekes jelenség is bekövetkezik – *a piaci szegmentáció*. Mivel részvénnyel rendelkező vagy hitelt felvenni tudó befektetőnek árazási hiba esetén nem érdemes a határidős termékbe fektetnie, csak olyanok maradnak a határidős piacon, akik ilyen lehetőségekkel nem rendelkeznek – jellemzően a „kisbefektetők". Amennyiben negatív árazási hiba lép fel, az azt jelenti, hogy a határidős piac résztvevőinek alacsonyabb a várakozásuk az index hozamára, mint azoknak, akik részvényekkel rendelkeznek. Pozitív árazási hiba esetén ugyanis a határidős piacon lévők „optimistábbak" azoknál, akiknek tőkéjük van.

Eredményeink a korábban bevezetett árazási hiba tekintetében is következményekkel járnak:

$$M_t = \frac{F_T^a - F_T}{F_T} = \frac{S_0(1+f(T-t)) - S_0(1+r(T-t))}{S_0(1+r(T-t))} =$$

$$= \frac{(f-r)(T-t)}{1+r(T-t)} \leq (f-r)(T-t). \tag{28}$$

A korábbiak felhasználásával, ha $\mu \geq r$,

$$0 \leq M_t \leq (\mu - r)(T - t), \tag{29}$$

ha pedig $\mu < r$,

$$0 \geq M_t \geq (\mu - r)(T - t). \tag{30}$$

Összefoglalóan

$$\left|M_t\right| \le \left|\mu - r\right|(T - t). \tag{31}$$

Vagyis az árazási hiba nemnegatív, ha az index várható hozama magasabb a kockázatmentes hozamnál, és nempozitív fordított esetben. Az árazási hibára tett korlát abszolút nagysága a határidő közeledtével csökken.

Az arbitrázslehetőség tehát akkor áll fenn, ha a határidős piacon új pozíciót létesítő befektető számára vagy a rövidre eladás, vagy a hitelfelvétel (esetleg mindkettő) korlátokba ütközik. Ekkor aki részvényekkel vagy tőkével rendelkezik (hitelt tud felvenni), kihasználhatja ezt a lehetőséget úgy, hogy a már ismertetett módon az indexből és hitelből előállítja a határidős terméket.

Az arbitrázs kereslete és egyensúly

Most, hogy láttuk, kik generálják az arbitrázslehetőségeket nem teljes piacok esetén, nyilvánvaló az is, kik tudnak élni velük: tőkével, illetve részvényekkel rendelkezők. Akiknek szabad tőkéjük van, és pozitív árazási hiba áll fenn, jobb, ha részvényindexet vesznek, és eladják határidőre, így kockázatmentesen magasabb hozamot érnek el, mintha kockázatmentes eszközbe fektetnék pénzüket. Akiknek viszont részvényeik vannak, és negatív árazási hiba áll fenn, jobb, ha eladják részvényeiket, a bevételt kockázatmentes értékpapírba fektetik, és részvényeiket határidőre visszavásárolják.

Ezek alapján úgy tűnik, hogy az arbitrázs keresleti függvényei vízszintes egyenesek – amint pozitív, illetve negatív árazási hiba áll fenn, az arbitrázs eltünteti az árazási hibát.

A probléma azonban nem ilyen egyszerű. Amikor egy szereplő tőkéjét teljes mértékben részvényindexbe fektette, nem marad számára szabad tőke további ugyanolyan irányú arbitrázspozíciók kiépítésére. Mivel így csak kockázatmentes pozíciót tud kiépíteni, ez számára egy bizonyos mértéken túl nem lesz előnyös, hiába kap rá a kockázatmentes értékpapírnál magasabb profitot. Lesznek ezért az árazási hibának szintjei, ahol még bizonyos szereplőknek nem érdemes végrehajtani az arbitrázst, másoknak viszont igen – így az arbitrázs keresleti függvénye az árazási hiba függvényében nőni fog.

A keresleti függvény alakja azonban időben nem lesz változatlan – alakját az fogja meghatározni, hogy az arbitrazsőröknek mennyi arbitrázspozíciójuk van nyitva – mekkora tőkéjüket, illetve mennyi részvényüket köti már le az arbitrázs. Kezdetben a keresleti függvény majdnem vízszintes lesz, ahogy azonban az arbitrazsőrök pozícióikat megnyitják, egyre magasabb árazási hiba szükséges ahhoz, hogy újabb szereplők további tőkét használjanak fel arbitrázsra.

Azt, hogy az egyensúly hol lesz, nyilván a kínálat és a kereslet egymáshoz viszonyított mennyisége dönti el. Hosszú távon az arbitrázs kereslete igazodik a kínálathoz (új tőke, illetve részvényesek piacra lépésével), így az árazási hiba megszűnik. Rövid távon azonban az egyensúly a két szélsőséges eset között fog elhelyezkedni.

A BUX arbitrázs intézményi keretei

Azonnali részvénypiac

1994 óta a BÉT-en automatikus kereskedés folyik az azonnali részvénypiacon (ekkor vezették be a CMSS nevű számítógépes rendszert). 1996. szeptember 9-ét megelőzően technikai okok miatt a részvényekkel való kereskedés 3-5, úgynevezett piacszegmensre volt osztva, és mindig csak egy-egy szegmens részvényei forogtak egyszerre. Ebben az időszakban tehát mindig csak egyazon szegmenshez tartozó részvényekre lehetett üzletet kötni, ezért nem lehetett előállítani egy időben az indexet alkotó portfóliót az azonnali piacon. Gyakran előfordult, hogy egy új szegmens indulásakor az index értéke hirtelen és jelentősen elmozdult.

1996. szeptember 9-ét követően a napi nyitó ajánlatok bevitelét követően az egyes részvényekkel való kereskedés megkezdése a piac szereplői által nem ismert, de előre rögzített sorrendben történt, 5 percen belül. Ezek után valamennyi tőzsdére bevezetett részvényre a teljes hátralévő kereskedési idő folyamán lehetett üzletet kötni.

A BÉT azonnali piacán a következő fő változást az új elektronikus távkereskedési rendszer, az MMTS bevezetése hozta 1998. november 20-án. A kereskedési idő az új rendszer adta lehetőség következtében folyamatosan nőtt, 1999. május 17-én érte el a ma is érvényes hosszúságát. A szabad szakasz azóta 10.00 órától 16.30-ig tart.

A magyar piacon a legutolsó időkig nem volt egyértelműen szabályozva az értékpapír-kölcsönzés és rövidre eladás *(short selling)* intézménye. Habár az 1997. január 1-jén életbe lépett 1996. évi CXI. (értékpapírtörvény) mindezt jogilag lehetővé tette, homályos megfogalmazásai a nyereség felosztására (miszerint az teljes egészében a kölcsönadót illette) megakadályozták intézményesülését. A 2002. január 1-jén életbe lépett új 2001. évi CXX. (tőkepiaci) törvény alapján várhatóan rövidesen lehetővé válik a rövidre eladás intézményének kialakulása a magyar piacon is, de a cikk írásának idején (2002. szeptember) információim szerint még egyetlen cég sem kapott engedélyt a PSZÁF-től ilyen tevékenység végzésére.

Határidős BUX-piac

A Budapesti Értéktőzsdén 1995. március 31-e óta lehetőség van a BUX indexszel való határidős kereskedésre is. Érdekesség, hogy bár a részvények kereskedése ekkor már automatikus kereskedésben folyt, a határidős piacon nyílt kikiáltással kezdődött meg az üzletkötés és 1999. szeptember 17-ig úgy folyt. Ekkortól a határidős piacot is az új MMTS kereskedési rendszer szolgálja ki.

Jelenleg kilenc határidőre lehet ügyletet kötni, amelyek közül a cikk írásának idején a legnépszerűbb a 2002. decemberi határidő. Az egyes határidők népszerűsége időben igencsak változott – míg kezdetben a külföldi példákhoz hasonlóan mindig a legközelebbi határidő volt a leglikvidebb, addig az első komolyabb tőzsdeválságot, 1997 őszét követően először a júniusi és decemberi határidők voltak a spekulánsok kedvencei, míg végül 1999-től a legközelebbi decemberi hónapok egyeduralma volt megfigyelhető.

Az 1998-ig dinamikusan növekedő határidős BUX piac 1999-től 2000-ig stagnált, 2001-ben viszont nominálisan is visszaesett. Ez utóbbi esés egyrészt a határidős részvénykontraktusok bevezetésének, másrészt pedig a belföldi részvénybefektetők érdeklődése csökkenésének köszönhető.

A két piac nyitása és zárása 1999. szeptember 17-e óta egyszerre történik, de ez nem mindig volt így. A legfontosabb időszak az ezt közvetlenül megelőző négy hónap volt, amikor az azonnali piac másfél órával tovább tartott nyitva, mint a határidős. Ez azért fontos, mert ebben az időszakban a két piac záróárai nem egy időben keletkeztek, valamint az arbitrázstevékenység is szünetelt az azonnali piac utolsó másfél órájában.

Amíg a piac szereplői tekintetében az azonnali piacot a külföldi és intézményi befektetők jelentős részvétele jellemezte, a határidős piacon mindig a belföldi magánbefektetők voltak túlsúlyban (az arbitrazsőrök nyilván mindkettőn). Ennek több oka is volt. Az egyik a határidős BUX piacon a devizaliberalizációig érvényben lévő pozíciós limitek, amelyet a külföldiek tevékenységének korlátozására írt elő az MNB a devizahatósági engedély megadásakor, bár ez effektív korlátként csak ritkán hatott. Másrészt a külföldi részvényalapok általában határidős piacokon nem, vagy csak az adott kontraktus külföldi felügyeleti engedélyének megadása után vehettek részt (amely a BUX-nak nem volt meg). A belföldi intézmények közül a befektetési alapokról szóló törvény elavult korlátozásai nem tették lehetővé, hogy a BUX-ot alkotó portfóliót teljes vagyonukból megvásárolják, valamint a PSZÁF állásfoglalása szerint derivatív ügyleteket „csak fedezeti célból" köthettek, így szabályozói kockázattal néztek szembe azok az alapok, amelyek például részvénybe fektetés helyett vásároltak határidős BUX kontraktusokat.

Empirikus elemzés

Adatok

Az első empirikus vizsgálatban az 1995. szeptember 18-a és 2001. december 18-a közötti időszak adatait elemezzük. A vizsgálat tárgya az 1995 decembere és 2001 decembere között lejáró határidős kontraktusok közül azok, amelyek forgalmuk alapján likvidnek voltak tekinthetők. Mint azt az előző részben elemeztük, 1995–1997 között általában a legközelebbi (három hónapon belül) lejáró kontraktusokat, ezután a júniusi és decemberi lejáratokat, majd 1999-től kezdve a decemberi lejáratokat kedvelték a befektetők, így mintánkban is ezen kontraktusok adatai szerepelnek.

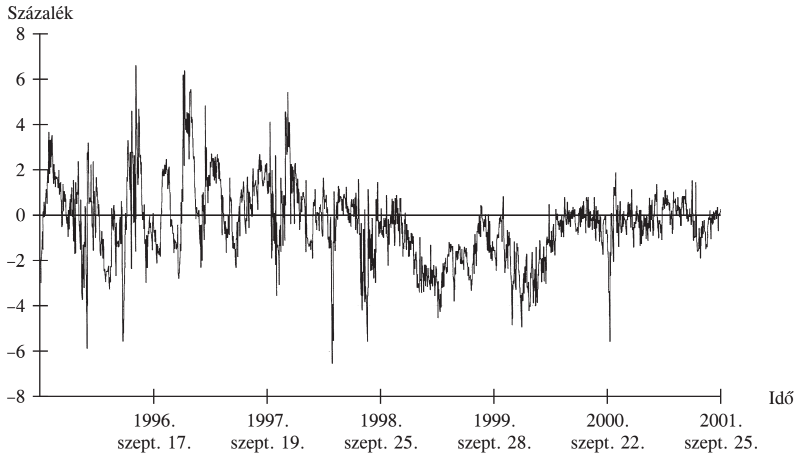
A BUX azonnali értékét a Budapesti Értéktőzsde bocsátotta rendelkezésünkre, míg a határidős elszámolóárakat a Központi Elszámolóház és Értéktár (Keler) Rt. adatbázisából kaptuk meg. A kockázatmentes kamatlábat 1997. február 17-ig az 1, 3, 6 és 12 hónapos diszkont kincstárjegyek aukción kialakult heti átlaghozamaiból interpoláltuk lineárisan az adott kontraktus lejáratáig. 1997. február 18-tól kezdve az Államadósság Kezelő Központ által naponta közzétett 3, 6 és 12 hónapos referenciahozamainak lineáris interpolálásával képeztük a kamatlábat. Az aukciók és a referenciahozamok adatsorát az Államadósság Kezelő Központ bocsátotta rendelkezésünkre. 3 hónapon belül a 3 hónapos, 12 hónapon túl pedig a 12 hónapos kamattal számoltunk (a 2 éves hozamot nem tudtuk használni, mivel az nem diszkont kincstárjegyekből, hanem kötvényekből visszaszámított lejáratig számított hozam volt).[13]

Vizsgálatunkban nap végi azonnali piaci záróárakat vetünk össze a határidős piac elszámolóárával. Mivel a határidős piac záró szakasza 15 perccel az azonnali piac zárása után ér véget, ezek az adatok általában legfeljebb 15 perc eltérést tartalmaznak. Ettől eltért a már említett 1999. május 17-től szeptember 16-ig tartó időszak, amikor a határidős piac 1,5 órával korábban zárt, mint az azonnali. Erre az időszakra ezért a 15 órai BUX értéket használtuk fel.

1996. szeptember 9-e előtt a kereskedés a korábban ismertetettek szerint nem egyszerre történt valamennyi részvényben. Az arbitrázst (illetve kváziarbitrázst) akkor is megkísérelhették a befektetők, nyilván nagyobb kockázattal, mint a későbbiek folyamán. Ebből kifolyólag ennek az időszaknak az adatait is szerepeltettük, azonban az árazási hibát nem a részvények záróáraiból számított BUX index, hanem a napi, forgalommal súlyozott átlagárból számított indexérték és a határidős kötések elszámolóára alapján számítottuk ki. Ezekből az eredményekből azonban csak óvatosan lehet következtetéseket levonni.

[13] Mivel az üzletkötések döntő többségében a lejárat éven belüli, ez az egyszerűsítés nem jelent lényeges torzítást.

5. ábra
A legközelebb lejáró kontraktus árazási hibája



Az árazási hiba

A nap végi adatokból a kamatláb segítségével a (35) képlettel számítottuk ki az árazási hibát (mivel a használt kamatlábak is lineáris kamatozás feltételezésével lettek éves szintre átszámítva):

$$Misp = \frac{F - S(1 + r(T - t))}{F}, \tag{35}$$

ahol F a kontraktus határidős ára, S a BUX index azonnali értéke, r a kamatláb, $T - t$ pedig a lejáratig számított idő évben.

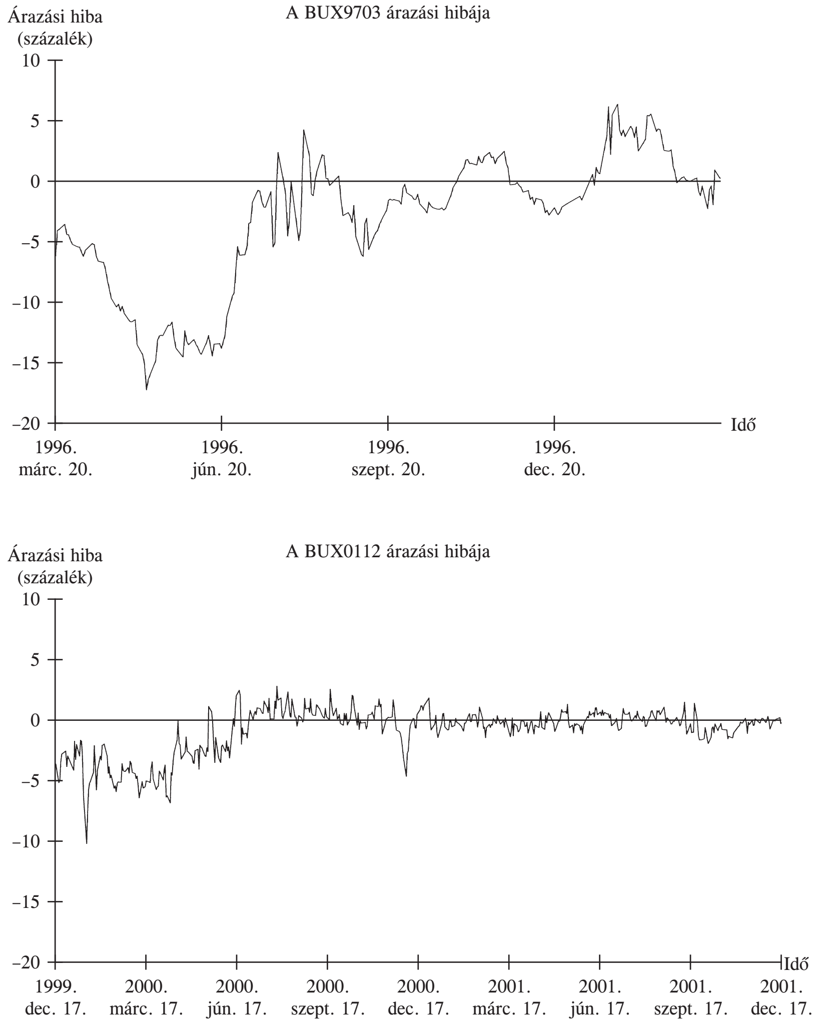
A *4. táblázatban* követhetjük nyomon a decemberi kontraktusok és a legközelebb lejáró kontraktus árazási hibájának legfontosabb statisztikáit.

4. táblázat
Az árazási hiba idősorok fő jellemzői
(százalék)

Kontraktus	Elemszám	Átlag	Medián	Maximum	Minimum	Szórás	Ferdeség	Csúcsosság
BUX9512	64	0,9405	1,0939	3,6845	-2,9846	1,3672	-0,3386	3,2403
BUX9612	249	–3,4555	–2,9528	5,6441	–12,9000	3,8935	–0,2784	2,2639
BUX9712	328	0,3194	0,9850	10,4380	–12,7098	4,0221	–0,4644	3,3912
BUX9812	494	1,9032	1,6446	14,0363	–11,7001	4,5165	–0,4516	4,1899
BUX9912	497	0,7260	–0,9778	15,0773	–7,5045	4,1610	1,4056	4,3945
BUX0012	500	–1,8084	–1,7717	2,0005	–5,7432	1,5443	–0,1276	2,1621
BUX0112	496	–0,8348	–0,2514	2,8147	–6,8342	1,8730	–1,1286	3,6395
Legközelebbi	1555	–0,4032	–0,3499	6,5947	–6,5409	1,6937	0,2517	4,0809

6. ábra

A BUX-piac érése



Látható, hogy az árazási hiba előjele időben változó: 1996-ban negatív, 1997–1998 között pozitív, utána pedig ismét inkább negatív tendencia volt megfigyelhető. A hiba változékonysága a kezdeti alacsony szint után 1997 és 1999 között többszörösére nőtt, majd azóta fokozatosan csökken – ez a piac érésére utal. Ezt illusztrálja a *6. ábra* is, amely az 1997. márciusi és a 2001. decemberi lejárat árazási hibáját hasonlítja össze.

A korábban felvázolt elméleti modellünk keretei közt tehát azt mondhatjuk, hogy a piacot 1995 és 1998 vége között mind a hitelfelvételi, mind pedig a rövidre eladási lehetőségek hiánya jellemezte (4. eset), 1998 vége óta azonban csak a rövidre eladási lehetőségek hiánya a jellemző (3. eset).

A legközelebb lejáró kontraktusokból álló idősor átlagos árazási hibája negatív, és mind szórása, mind pedig minimum és maximum értéke kisebb az egyes kontraktusokénál. Ebből látható, hogy a nagyobb kilengések általában a távolabbi határidőket jellemezték.

A nemzetközi tapasztalatokhoz hasonlóan a BUX árazási hiba idősoraiban is magas autokorrelációt tapasztalhatunk. Az *5. táblázat* az első, és a tizedrendű autokorrelációs együtthatókat tartalmazza. Láthatjuk, hogy az autokorreláció szinte folyamatosan erősödött, míg a BUX0012 esetén kis visszaesés volt tapasztalható benne.

5. táblázat

Autokorrelációs együtthatók

Kontraktus	AC(1)	AC(10)
BUX9512	0,793	0,206
BUX9612	0,935	0,696
BUX9712	0,945	0,609
BUX9812	0,924	0,519
BUX9912	0,957	0,810
BUX0012	0,864	0,654
BUX0112	0,882	0,679
Legközelebbi	0,836	0,518

Elméleti modellek tesztelése

Az elméleti részben ismertetett CAPM ihletésű modellünk tesztelése igen nehéz. Főleg azért – amiért a CAPM következtetései sem tesztelhetők –, mert bár a kockázatmentes kamatláb igen, az index várt hozama nem figyelhető meg.

Ha azonban időben megközelítőleg állandónak tekintjük az index várt hozamát (vagy legalábbis egy állandó alsó és felső korlátot feltételezünk), a modell következtetései szerint az árazási hiba idősorok egy „tölcsérben" kell elhelyezkedjenek (a tölcsér a lejárat közeledtével szűkül). Mivel azonban a felső és alsó korlátot jelentő egyenlőtlenségek csak extrém esetekben teljesülnek egyenlőségként (ha az arbitrazsőröknek elfogyott a tőkéjük, illetve részvényeik), általános esetben az árazási hiba ennek a tölcsérnek a belsejében lesz.

$$|M| = \left|\frac{F_T^a - F_T}{F_T}\right| = \left|\frac{S(1+f(T-t)) - S(1+r(T-t))}{S(1+r(T-t))}\right| = \left|\frac{(f-r)(T-t)}{1+r(T-t)}\right| \le |\mu - r|(T-t). \quad (36)$$

A következőkben két tesztet végzünk el.

Az első tesztben azt vizsgáljuk meg, hogy az árazási hiba abszolút értéke a lejárat közeledtével csökken-e. Mivel azonban az árazási hiba (és így annak abszolút értéke is) magas elsőrendű autokorrelációt tartalmaz, az egyszerű OLS becslés standard hibái általában lefelé torzítanak (az együtthatók torzítatlanok, mivel a magyarázóváltozók között nincs késleltetett függő változó). A helyes standard hibák (és ezekből t hányadosok) meghatározásához mi is a *Newey–West* [1987] által kidolgozott eljárást használtuk *(6. táblázat)*.[14]

[14] Ez az eljárás eltér az ismertebb Cochrane–Orcutt-eljárástól, amely a regresszióba bevonja a késleltetett hibatagot is. A Newey–West-modell a becslés helyes kovarianciamátrixát állítja elő, így az OLS becsléssel kapott együtthatók nem, csak a standard hibák változnak. A módszer részletes ismertetését lásd *Greene* [1993] művében.

6. táblázat
Regressziós eredmények

Megnevezés	BUX9612	BUX9712	BUX9812	BUX9912	BUX0012	BUX0112
C	0,011873	0,007645	0,009864	–0,00172	0,011456	–0,02416
t statisztika	3,01	2,38	3,45	–0,46	4,94	–3,18
HATRALEVO	0,000161	9,94E–05	6,13E–05	8,99E–05	2,14E–05	6,98E–05
t statisztika	6,64	5,21	6,01	6,40	3,19	5,14
Mintaelemszám	249	328	494	497	500	251
R^2	0,2753	0,3047	0,2225	0,4223	0,1030	0,3490
Korrigált R^2	0,2724	0,3025	0,2209	0,4212	0,1012	0,3464
Kockázati prémium (százalék)	5,88	3,63	2,24	3,28	0,78	2,55

Eredményeink egyértelműek, 99 százalékos szignifikanciaszint mellett mindegyik vizsgált kontraktus esetében a hátralévő idő növekedésével nő az árazási hiba. Az együttható 0,00002 és 0,00016 között változik, tehát a vártnak megfelelően pozitív. A kockázati prémium abszolút értéke éves szinten ezek alapján 0,78 százalék és 5,88 százalék között volt megtalálható.

A második vizsgálatban modellünket a közelebbi és a második legközelebbi lejárat árazási hibájának összehasonlításával teszteljük. A korábban bemutatottak miatt ugyanis

$$M_1 = \frac{F^a_{T_1} - F_{T_1}}{F_{T_1}} = \frac{S_0(1+f_1(T_1-t)) - S_0(1+r_1(T_1-t))}{S_0(1+r_1(T_1-t))} = \frac{(f_1-r_1)(T_1-t)}{1+r_1(T_1-t)} \le (f_1-r_1)(T_1-t). \quad (37)$$

$$M_2 = \frac{(f_2-r_2)(T_2-t)}{1+r_2(T_2-t)} \le (f_2-r_2)(T_2-t). \quad (38)$$

Ha feltesszük, hogy az index hozamgörbéje vízszintes, és az arbitrazsőröknek ismét csak nincs tőkéjük, illetve részvényük, akkor $\mu = f_1 = f_2$,

$$\frac{M_1}{T_1-t} \approx \mu - r \approx \frac{M_2}{T_2-t}. \quad (39)$$

A következő regresszióban az egyenlet bal oldala és jobb oldala közti összefüggést vizsgáljuk meg a legközelebb és a második legközelebb lejáró kontraktusokra. Az autokorrelációt a korábban már ismertetett módon kezeljük.

$$\frac{M_1}{T_1-t} = \underset{(-1,48)}{-0,0000401} + \underset{(8,61)}{2,12}\frac{M_2}{T_2-t} \quad (40)$$

$N = 1306$ $\qquad$ $R^2 = 0,256$

Eredményeink részben a vártnak megfelelően alakultak, hiszen egyrészt a konstans inszignifikáns lett, másrészt a változó együtthatója pedig minden fontos szignifikanciaszinten szignifikánsnak bizonyult. Egyetlen problémánk az, hogy az együttható nem 1, hanem 2,12, és mivel standard hibája 0,246, el kell vetnünk azt a hipotézist, hogy egyenlő 1-gyel.

A fenti jelenség oka az lehet, hogy a lejáratot közvetlenül megelőző időben az árazási hiba még jelentős kockázati prémium esetén is a tranzakciós költségek okozta sávba esik.

Ha például a kockázati prémium 12 százalék, két héttel a lejárat előtt ez csak fél százalék árazási hibát indokolna, ami még az intézményi befektetők esetére becsülhető 1 százalékos semleges sávon belül van.

Ennek a problémának a kiküszöbölésére elhagytuk az idősorokból azokat az árazási hibákat, amelyek a lejáratot megelőző két hónap adatait tartalmazták (ez az iménti példával azt jelenti, hogy ha 6 százalékot meghaladó a kockázati prémium nagysága, akkor a megfigyelés végig kint lesz a semleges sávból). A módosított adatsoron végrehajtott becslés eredményei az alábbiak lettek:

$$\frac{M_1}{T_1 - t} = \underset{(-2{,}94)}{-0{,}0000241} + \underset{(13{,}65)}{1{,}25}\frac{M_2}{T_2 - t} \qquad (41)$$

$$N = 776 \qquad R^2 = 0{,}59$$

Látható, hogy eredményeink most már sokkal közelebb vannak az elméletileg várt értékekhez. Bár a konstans szignifikáns lett, értéke közelebb került nullához. Az együttható értéke azonban 1,25 lett, jóval közelebb került 1-hez. A becslés pontossága is jelentősen javult.

Következtetések

Cikkünkben a határidős indexkontraktusok árazási hibájának elemzésével foglalkoztunk. Az irodalomban található elméleti modellek ismertetésekor megállapítottuk, hogy teljes és tökéletes piacok feltételezése esetén amennyiben nincs arbitrázs, a határidős áraknak az azonnali áraknál a kockázatmentes kamatlábbal kell magasabbaknak lenniük. A tranzakciós költségek bevezetésével a határidős ár körül kialakul egy semleges sáv, amelyben még nem érdemes végrehajtani az arbitrázst – így az árazási hiba felső korlátot kap. Ha eltérő a hitelfelvételi és betéti kamatláb, ez a sáv a lejárat közeledtével szűkül.

Építettünk egy modellt nem teljes piacok esetére, amely szerint ha nincsenek hitelfelvételi lehetőségek, vagy nem lehet részvényeket rövidre eladni, az árazási hiba felső határa az index várt hozama és a kockázatmentes kamatláb különbsége. A modell segítségével megmagyarázható az árazási hiba nemzetközileg tapasztalható statisztikai tulajdonságainak legtöbbje.

Áttekintettük a BUX arbitrázs intézményi kereteit, és megállapítottuk, hogy az elmúlt hét évben jelentős változások zajlottak le. A kontraktus indulása óta a határidős piac kereskedési ideje a kezdeti fél óráról hat és fél órára nőtt, a nyílt kikiáltásos kereskedést elektronikus kereskedési rendszer váltotta fel, az azonnali piac szegmentált kereskedésével szemben ma már minden részvénnyel lehet folyamatosan kereskedni. Szinte csak egyetlen intézményi probléma maradt a BUX arbitrázs végrehajtói számára: ez pedig az értékpapír-kölcsönzés hiánya, ami miatt az árazási hibák mind a mai napig jellemzik a határidős BUX piacot.

A dolgozat empirikus részében nap végi, záróárakon vizsgáltuk az árazási hiba jellemzőit, és teszteltük elméleti modellünket. Megállapítottuk, hogy a nemzetközi tapasztalatokhoz hasonlóan az árazási hiba nálunk is autokorrelált, előjele azonban az idő során változott. Elméleti modellünk tesztelésekor mindkét felállított hipotézisünk elfogadható volt a gyakorlatban fontos szignifikanciaszinteken. A tranzakciós költséget meghaladó pozitív árazási hibák az 1997–1998-as időszakban még jellemzők voltak, azonban az elmúlt három-négy évben már eltűntek. A tranzakciós költségeket meghaladó negatív árazási hibák azonban ha csökkenő mértékben is, de továbbra is előfordulnak.

Hivatkozások

ÁBEL ISTVÁN–SÁNDOR GYÖRGY [1992]: Tőzsdeindexek az Egyesült Államokban. Pénzügyi Szemle, 2–3. sz. 142–153. o.

BEACH, C.–MACKINNON, J. [1978]: A Maximum Likelihood Procedure for Regression with Autocorrelated Errors. Econometrica, 51–58. o.

BÜHLER, W.–KEMPF, A. [1995]: DAX Index Futures: Mispricing and Arbitrage in German Markets. Journal of Futures Markets, 15. No. 7. 833–859. o.

BRENNAN, M. J.–SCHWARTZ, E. S. [1990]: Arbitrage in Stock Index Futures. Journal of Business, 63. S7–S31. o.

BRENNER, M.–SUBRAHMANYAM, M. G.–UNO, J. [1989]: The Behaviour of Prices in the Nikkei Spot Index Futures Markets. Journal of Financial Economics, 23. 363–383. o.

BRENNER, M.–SUBRAHMANYAM, M.G.–UNO, J. [1990]: Arbitrage Opportunities in the Japanese Stock and Futures Markets. Financial Analysts Journal, március–április, 14–24. o.

CORNELL, B. [1985]: Taxes and pricing of stock index futures, Journal of Futures Markets, 5, No. 2. 89–101. o.

CORNELL, B.–FRENCH, K. R. [1983*a*]: The pricing of stock index futures. Journal of Futures Markets, vol. 3. No. 1. 1–14. o.

CORNELL, B.–FRENCH, K. R. [1983*b*]: Taxes and the pricing of stock index futures. Journal of Finance, Vol. 38. No. 3. 675–694. o.

COX, J. C.–INGERSOLL, J. E.–ROSS, S. A. [1981]: The Relationship between Forward Prices and Futures Prices. Journal of Financial Economics, Vol. 9. 321–346. o.

FAZAKAS GERGELY [1992]: A tőzsdeindexekről. Közgazdasági Szemle, 7–8. sz. 747–761. o.

FIGLEWSKI, S. [1984*a*]: Explaining the Early Discounts on Stock Index Futures: The Case for Disequilibrium. Financial Analysts Journal, július–augusztus, 43–47. o.

FIGLEWSKI, S. [1984*b*]: Hedging Performance and Basis Risk in Stock Index Futures. Journal of Finance, 39. No. 3 657–669. o.

FUNG, J. K. W.–DRAPER, P. [1999]: Mispricing of Index Futures Contracts and Short Sales Constraints. Journal of Futures Markets, 19. No. 6. 695–715. o.

GOULD, F. J. [1988]: Stock Index Futures: The Arbitrage Cycle and Portfolio Insurance. Financial Analysts Journal, január–február, 48–62. o.

GRESSIS, N.–VLAHOS, G.–PHILLIPATOS, G. C. [1984]: A CAPM-based analysis of stock index futures. Journal of Portfolio Management, tavasz, 47–52. o.

GREENE, W. H. [1993]: Econometric Analysis. Prentice Hall, Englewood Cliffs.

HEMLER, M. L.–LONGSTAFF, F. A [1991]: General Equilibrium Stock Index Futures Prices: Theory and Empirical Evidence. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 26. 287–308. o.

KEMPF, A. [1998]: Short Selling, Unwinding and Mispricing. Journal of Futures Markets, 18 No. 8 903–923. o.

LIM, KIAN-GUAN [1992]: Arbitrage and Price Behaviour of the Nikkei Stock Index Futures. Journal of Futures Markets, 12 No. 2 151–161. o.

MACKINLAY, C.–RAMASWAMY, K. [1988]: Index-Futures Arbitrage and the Behaviour of Stock Index Futures prices. Review of Financial Studies, 137–158. o.

MAKARA TAMÁS [1994]: A portfólióelmélet alapjai és a CAPM. Kézirat, Budapesti Közgazdaságtudományi Egyetem, Budapest.

MERRICK, JR. J. J. [1989]: Early Unwindings and Rollovers of Stock Index Futures Arbitrage Programs: Analysis and Implications for Predicting Expiration Day Effects. Journal of Futures Markets, 9. No. 2. 101–111. o.

MODEST, D. M.–SUNDARESAN, M. [1983]: The Relationship between Spot and Futures Prices in Stock Index Futures Markets: Some Preliminary Evidence. Journal of Futures Markets, 3. No.1. 15–41. o.

NEWEY, W. K.–WEST, K. D. [1987]: A Simple, Positive Definite, Heteroscedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix. Econometrica, 55. 703–708. o.

PUTTONEN, V. [1993]: Stock Index Arbitrage in Finland: Theory and Evidence in a new market. European Journal of Operations Research, 68. 304–317. o.

Puttonen, V.–Martikainen, T. [1991]: Short Sale Restrictions – Implications for Stock Index Arbitrage. Economics Letters, 37. 159–163. o.

Ramaswamy, K.–Sundaresan, M. [1985]: The Valuation of Options on Futures Contracts. Journal of Finance, 40. 1319–1340. o.

Szatmári Alexandra [1997]: Indexarbitrázs. Tudományos Diákköri dolgozat, Budapesti Közgazdaságtudományi Egyetem, Budapest.

Yadav, P. K.–Pope, P. F. [1990]: Stock Index Futures Arbitrage: International Evidence. Journal of Futures Markets, 10. 573–603. o.

Yadav, P. K.–Pope, P. F. [1994]: Stock Index Futures mispricing: Profit Opportunities, or Risk Premia? Journal of Banking and Finance, 18. 921–953. o.