Közgazdasági Szemle, XLIX. évf., 2002. szeptember (713–724. o.)

SIMONOVITS ANDRÁS

Rugalmas nyugdíjkorhatár és optimális lineáris járulék- és járadékfüggvény

A tanulmány a mechanizmustervezés módszerével keresi meg a rugalmas nyugdíjrendszer optimális járulékkulcsát és lineáris járadékfüggvényét. Először a kormányzat bejelent egy járadékfüggvényt, amely a havi nyugdíjat a szolgálati idő lineáris függvényében állapítja meg. A különböző élettartamú és szorgalmú egyének optimálisan választják meg szolgálati idejüket. A kormányzat nem ismeri az egyéni jellemzőket, csak eloszlásukat; s ennek alapján egy olyan optimális járadékfüggvényt választ, amely maximalizálja a társadalmi jólétet (például az egyéni hasznosságmaximumok aggregáltját) társadalmi költségvetési feltétel mellett (például az aggregált be- és kifizetések összege nulla). Az optimális járulékkulcs hasonlóan vizsgálható.*
Journal of Economic Literature (JEL) kód: D86, D92, H55

Egy korábbi cikkemben (*Simonovits* [2001]) a rugalmas nyugdíjkorhatár kérdését tanulmányoztam, önkényesen választott járulékkulcs és nyugdíj–szolgálati idő függvény, röviden járadékfüggvény alapján (vö. *Sheshinski* [1978]). Az ösztönzési bonyodalmat az *aszimmetrikus információ* okozza: az egyénnek több ismerete van saját élettartamáról és hasznosságfüggvényéről, mint a kormányzatnak. Próbáltam megmutatni, hogy a *biztosításmatematikailag tisztességes* járadékfüggvény sem nem tisztességes, sem nem biztosítás, hiszen a hosszabb élettartamú egyén általában később megy nyugdíjba (empirikus igazolást *Waldron* [2001] nyújt), tehát nem lehet átlagos élettartammal számolni.

Bár a tényleges kormányzatok is eléggé önkényes (például gyakran változó) szabályokat iktatnak törvénybe, a közgazdaság-elméletben jelenleg megkívánják a normatív modell kidolgozását. *Simonovits* [2001]-ben csak utaltam, most megkísérlem a hiányosságok pótlását.

Ebben a cikkben az *optimális nyugdíjösztönzés*t elemezzük, nevezetesen azt, hogy mekkora τ járulékkulcsot és milyen $b(R)$ járadékfüggvényt kell a korábban bevezetett modellben érvényesíteni ahhoz, hogy az egyéni hasznosságmaximumok (transzformáltjainak) összegével definiált társadalmi jóléti függvény is maximális legyen.

Röviden a történelmi előzményekről: *Mirrlees* [1971] elemzett először optimális ösztönzési feladatokat az optimális személyiadó-függvény esetében. A közgazdasági nehézség abból adódik, hogy a kormányzat nem ismeri az egyének munkatermelékenységét és munkaidejét, csak a szorzatukként megjelenő jövedelmet tudja megfigyelni. Itt az adóz-

* Külön hálával tartozom *Eső Péternek,* akitől a rugalmas nyugdíjrendszerek közös tanulmányozásakor rengeteget tanultam az optimális mechanizmustervezésről, valamint *Peter Diamondnak,* aki könyvének félig kész változatát rendelkezésemre bocsátotta. *Vincze János* hasznos tanácsokat adott a dolgozat korábbi változatáról. A kutatást az OTKA T 037383 forrása és az OKTK támogatta. A cikk a szerzőnek a Bevezetés a nyugdíjmodellezésbe című könyve (Budapest, Typotex) 12. fejezetén és *A)* függelékén alapul.

Simonovits András, MTA Közgazdaságtudományi Kutatóközpont (e-mail: simonov@econ.core.hu).

tatás célja elsősorban jövedelem-újraelosztás a gazdagoktól a szegényeknek, figyelembe véve az egyéni teljesítmény-visszatartást. Az információs aszimmetria azonban kizárja az igazi *(first-best)* optimum elérését. Ehelyett be kell érni egy olyan, második legjobb *(second-best)* adófüggvénnyel, amely korlátozott információ esetén optimalizálja a társadalmi jólétet. A feladat matematikailag nagyon bonyolult, és már *Sheshinski* [1972] is érdemesnek találta a gyakorlatban nagyon fontos lineáris személyiadó-függvényt optimalizálni (lásd még *Atkinson–Stiglitz* [1980], 13. fejezet és magyarul *Vincze* [1991] és *Gömöri* [2001]).

A nyugdíjirodalomban először *Diamond–Mirrlees* [1978] vizsgált optimális ösztönzési modellt. Náluk az egyének életkora és hasznosságfüggvénye egyaránt azonos, viszont véletlenül bármikor megrokkanhatnak, sőt úgy tehetnek, mintha megrokkantak volna. A szerzők kiszámították, hogy a kormánynak milyen (egyébként bonyolult) ösztönzési rendszert kell bevezetnie a maximális hatékonyság érdekében.

E cikk írásával egy időben *Diamond* [2001] 7. fejezete és *Eső–Simonovits* [2002] is foglalkozott az optimális járulékkulcs és járadékfüggvény kérdésével. Diamond végtelen (kontinuum) sok típusú (élettartamú és a vele korreláló fogyasztási rugalmasságú) egyénből álló sokaságot vizsgált, s az egyének két időpontban mehettek nyugdíjba: korán vagy későn. *Eső–Simonovits* [2002] véges sok típusú egyént feltételezett, akik csak élettartamukban különböztek egymástól, és bármikor nyugdíjba mehettek. Mindkét cikk meghatározta az optimális ösztönzést. Ebben a tanulmányban részben bonyolultabb, részben egyszerűbb feladatot oldunk meg: bonyolultabbat, mert az élettartam és a fogyasztási rugalmasság tetszőleges kétdimenziós eloszlású lehet; egyszerűbbet, mert általános járadékfüggvény helyett lineárist vizsgálok.

A cikk felépítése a következő: először ismertetjük a nyugdíjösztönzési modellt, majd absztrakt formába öntjük a feladatot és a kapott absztrakt eredményeket alkalmazzuk a konkrét esetre. Végül néhány következtetést fogalmazunk meg. Bár e cikk támaszkodik az előzményére, attól függetlenül is olvasható.

A nyugdíjösztönzési modell

Röviden megismételjük a *Simonovits* [2001]-ben bevezetett modell alapfogalmait és alapgondolatát. Lényeges újítás, hogy a konkrét CRRA–Cobb–Douglas-hasznosságfüggvény mellett az általános u és v hasznosságfüggvényekre mondjuk ki a tételeinket, így azok áttekinthetőbbé válnak. Emellett némileg logikusabbá tesszük a felépítést és javítjuk a szimulációt is.

Egyéni optimum

Minden egyén ismeri saját D (felnőtt) élettartamának várható értékét, amelyből R hosszúságú időt dolgozik: ez a szolgálati idő. Végig egységnyi a keresete, s ebből τ járulékkulcsot fizet az államnak, cserébe b életjáradékot kap. Amint az megszokott az időskori nyugdíjmodellekben, feltesszük, hogy a dolgozók nem takaríthatnak meg.

A dolgozók és a nyugdíjasok másként értékelik fogyasztásukat, ezért megkülönböztetjük az $u(a)$ dolgozói hasznosságfüggvényt és a $v(b)$ nyugdíjas hasznosságfüggvényt, ahol $a = 1 - \tau > 0$ és $b > 0$. Különböző egyének különbözőképpen értékelik a szabadidejüket, ezért egy ε paraméterrel bővítjük mindkét hasznosságfüggvényeket: $u(\varepsilon, \cdot)$ és $v(\varepsilon, \cdot)$ nagyobb ε-hoz nagyobb u és v tartozik. Végül az egyéni életpálya-hasznosság

$$U(D,\ \varepsilon,\ \tau,\ b,\ R) = u(\varepsilon,\ 1 - \tau)R + v(\varepsilon,\ b)(D - R), \tag{1}$$

és az egyéni nettó életpálya-járulék

$$z(D,\ \varepsilon,\ \tau,\ b,\ R) = \tau\ R - b(D - R). \tag{2}$$

Először az *autarkiát* vizsgáljuk, ahol az egyéni életpálya-járulék nulla:

$$z(D,\ \varepsilon,\ \tau,\ b,\ R) = 0. \tag{3}$$

Megfogalmazzuk az autark optimum feltételét:

1. tétel. *Ha az egyén optimálisan megválaszthatja a τ jarulékkulcsát és b nyugdíját, akkor az élettartamtól függetlenül teljesül*

$$u(\varepsilon, 1-\tau^\circ) - v(\varepsilon, b^\circ) + v_b'(\varepsilon, b^\circ)[\tau^\circ + b^\circ] = 0, \tag{4}$$

$$u_a'(\varepsilon, 1-\tau^\circ) - v_b'(\varepsilon, b^\circ) = 0. \tag{5}$$

(2)–(3) szerint az optimális szolgálati idő arányos az élettartammal:

$$R^\circ = \frac{b^\circ}{b^\circ + \tau^\circ} D. \tag{6}$$

Megjegyzések. 1. Mivel a nyugdíjasnak több szabadideje van, a szokásos konkavitási feltevések mellett célszerű feltenni, hogy $u_a'(\varepsilon, a) = v_b'(\varepsilon, b)$ esetén $u(\varepsilon, a) < v(\varepsilon, b)$ teljesül (vö. *Diamond–Mirrlees* [1978]). A (4)–(5) egyenletrendszernek pozitív (τ°, b°) megoldása van.

2. Ha feltesszük, hogy $u_a'(\varepsilon, c) < v_b'(\varepsilon, c)$, akkor $1 - \tau^\circ > b^\circ$.

Bizonyítás. *a)* Felírjuk a feladat Lagrange-függvényét a μ szorzóval:

$$\mathcal{L}(\tau, b, R) = u(\varepsilon, 1-\tau)R + v(\varepsilon, b)(D - R) + \mu\{\tau R - b(D - R)\}$$

és a τ, b és R szerinti parciális deriváltakat nullává tesszük. Kiküszöbölve μ-t $\mathcal{L}_\tau' = \mathcal{L}_b' = 0$-ból, adódik az (5). Behelyettesítve μ-t $\mathcal{L}_R' = 0$-ba, adódik a (4).

A szimulációnál egy általánosított CRRA-hasznosságfüggvényt alkalmazunk. Föltesszük, hogy az egyént egy $(\sigma,\ \varepsilon)$ valós skalárpár jellemzi: $\sigma < 1$, ahol $1/(1 - \sigma)$ *az időbeli helyettesítés rugalmassága*, és ε $(0 < \varepsilon < 1)$ a *pillanatnyi hasznosság fogyasztás szerinti rugalmassága*. Az egyén t pillanatbeli hasznossága két tényező szorzata – a pillanatnyi $c(t)$ fogyasztás ε-odik hatványáé: $c(t)^\varepsilon$ és a pillanatnyi $l(t)$ szabadidő $(1 - \varepsilon)$-odik hatványáé: $l^{1-\varepsilon}(t)$.

Oszthatatlanság miatt az egyén a t pillanatban vagy a *minimális* l_m *szabadidőt* vagy a *maximális* l_M *szabadidőt* választja, ahol $0 < l_m < l_M$. Normalizálva, az egyén vagy $l_M - l_m = 1$ intenzitással *dolgozik*, vagy *nyugdíjba* vonul és maximálisan pihen. Legyen $\lambda = l_m/l_M$, *a minimális és a maximális szabadidő hányadosa*. Feltesszük, hogy ez a paraméter mindenkire azonos. Természetesen $0 < \lambda < 1$. Ekkor az (1) egyszerűsödik:

$$U = \sigma^{-1}[\lambda^{(1-\varepsilon)\sigma}(1-\tau)^{\varepsilon\sigma} R + b^{\varepsilon\sigma}(D - R)]. \tag{1'}$$

Az *1. tételt* az *1. táblázatban* egy számpéldasorozattal szemléltetjük. Egyetlen paraméterértéket rögzítünk: D = 50 év. Az eredmények értelmezésekor ne feledkezzünk meg arról, hogy a kort a munkába lépéstől (például 20 évtől) számítjuk.

Vegyük észre, hogy míg a helyettesítési arányok eléggé stabilak, addig mind a szolgálati idő, mind a járulékkulcs nagyon érzékenyen függ a fogyasztási rugalmasságtól. Az életpálya-hasznosságok is eléggé érzéketlenek a paraméterekre, s ez megnehezíti a jóléti összehasonlítást.

Későbbi alkalmazás miatt változtatni fogjuk az egyéni élettartamot is. Stacionárius népességet tételezünk föl, ezért a korosztályi hosszmetszeti adatok megegyeznek az

1. táblázat
Autark egyéni optimumok

Fogyasztási rugalmasság (ε)	Szolgálati idő (év) ($R°$)	Helyettesítési arány ($\beta°$)	Járulék-kulcs ($\tau°$)	Életpálya-hasznosság ($U°$)
0,32	28,1	0,468	0,267	–81,3
0,35	34,5	0,496	0,183	–79,9
0,38	41,9	0,524	0,092	–77,3

aggregált keresztmetszeti adatokkal. Az értékelést megkönnyítendő, szimmetrikus háromelemes diszkrét eloszlással dolgozunk: $\varepsilon = 0{,}35 \pm 0{,}03$; $D = 50 \pm 5$, és feltesszük, hogy a peremeloszlások sztochasztikusan függetlenek. Bemutatjuk a 9 típussal dolgozó szimuláció aggregált mutatóit. A népesség teljes keresete $W° = 313{,}5$ egység, míg a (12)-ben definiálandó társadalmi jólét értéke $V° = -715{,}8$.

Az információs aszimmetria miatt nagyon drága lehet életjáradékot vásárolniuk (*Friedmann–Warshawsky* [1990]). Ez az egyik fő oka annak, hogy a kormányok kötelezővé teszik a nyugdíjrendszerben való részvételt.

Mielőtt rátérnénk a következő alpontra, az *1. tétel* egy egyszerű következményét mondjuk ki.

1. következmény. *Ha az egyén csak az R szolgálati idejét választhatja meg optimálisan, de a τ járulékkulcsot a kormány határozza meg, akkor (4) és (6) teljesül, de (5) általában nem.*

Adott járulékkulcs, járadékfüggvény és optimális szolgálati idő

Ebben az alpontban az egyénnek a kormányzat előírja, hogy évente keresetének hányad részét tegye félre, mekkora nyugdíjat kap adott szolgálati idő után (adott a járadékfüggvény), de az egyén dönthet arról – például az életpálya-hasznosságfüggvényét maximalizálva –, hogy mennyi időt dolgozik, és mennyit tölt nyugdíjban: *kötött választás*.

A probléma akkor érdekes, ha feltesszük, hogy az egyének ε rugalmassági együtthatója, valamint D élettartama szóródik, az egyének ismerik rugalmasságukat és élettartamukat, de a kormányzat nem.

2. tétel. *a) Jól viselkedő U hasznosságfüggvény, b(R) járadékfüggvény és τ járulékkulcs esetén az optimális $R(D,\varepsilon)$ szolgálati idő–élettartamfüggvény kielégíti a következő egyenletet:*

$$u(\varepsilon, 1-\tau) + v_b'(\varepsilon, b)b'(R)(D-R) - v(\varepsilon, b) = 0. \tag{7}$$

b) A (7) mellett az optimum elégséges feltétele:

$$(v_{bb}''b'^2 + v_b'b'')(D-R) - 2v_b' < 0, \tag{8}$$

amelyből következik, hogy az optimális $R(D,\ \varepsilon)$ szolgálati idő a D élettartam növekvő függvénye.

Megjegyzések. 1. Jól viselkedő hasznosságfüggvénynél az optimum belső pont: $0 < \hat{R} < D$.

2. Mivel most sem a járulékkulcs, sem a nyugdíj nem optimális az egyének számára – a (6)-tal ellentétben –, az optimális szolgálati idő sem arányos többé az élettartammal. Érthető módon azonban egy ösztönzés akkor megfelelő, ha az optimális $R(D,\ \varepsilon)$ szolgá-

lati idő minden ε-ra a D élettartam növekvő függvénye. Ennek elégséges feltétele, hogy a (8) teljesüljön mindkét fontos speciális esetben, amelyet hamarosan vizsgálunk.

3. Ha mindenkinek azonos lenne a fogyasztási rugalmassága, akkor $R(D, \varepsilon)$ invertálásával a kormányzat kiszámíthatná a $D(R)$ egyéni élettartamokat a választott szolgálati időkből.

Bizonyítás. *a)* Deriváljuk U-t R szerint, és tegyük nullává a deriváltat stb.

b) Elegendő, ha az $U'_R(D,\varepsilon,\tau,R)$ függvény R-nek csökkenő függvénye. Az implicit függvény tételét alkalmazva, az $U'_R(D,\varepsilon,\tau,R) = 0$ függvényre:

$$R'_D(D,\varepsilon) = -\frac{U''_{RD}}{U''_{RR}} = \frac{v'_b b'}{-(v''_{bb}b'^2 + v'_b b'')(D-R) + 2v'_b b'}. \tag{9}$$

Figyelembe véve, hogy $v'_b > 0$, $b' > 0$, feltételünkből következik $R'_D(D,\varepsilon) > 0$.

Központi szerepet játszik vizsgálatunkban az a megfigyelés, hogy tág feltételek mellett a nettó életpálya-járulék különbözik nullától.

2. következmény. *Ha* $dz(D,\tau,b,R)/dD < 0$, *akkor az egyéni nettó életpálya-járulék az élettartam csökkenő függvénye:* $dz(D,\tau,b,R)/dD < 0$.

Megjegyzés. A 2. következmény feltételei eléggé általánosak. Az első feltétel empirikusan nyilvánvaló. A második feltétel nyilvánvalóan teljesül konkáv járadékfüggvényekre (beleértve a lineárist), mert $b'' \le 0$. Ha b konvex, akkor bevezetve a v CRRA együtthatóját, ζ-t, a második feltevés $b'' \le b'^2/\zeta$-re egyszerűsödik. Az ünnepelt naivan méltányos járadékfüggvény esetén [lásd $(\widetilde{13})$], a feltétel a valóságban teljesülő $\zeta \ge 1$ egyenlőtlenségre egyszerűsödik. Továbbá a második feltételből következik (8).

Bizonyítás. Vegyük a $z(\ )$ függvény D szerinti teljes deriváltját:

$$\frac{dz(D,\tau,b,R)}{dD} = (\tau + b(R))R'(D) - b'(R)(D-R) - b(R).$$

(9) értelmében a második feltételből következik $R'_D(D,\varepsilon) < 1/2$. Az első feltétel miatt $1/2 < b(R)/[\tau + b(R)]$, tehát $R'_D(D,\varepsilon) < b(R)/[\tau + b(R)]$. Mivel $b'(R) > 0$, $dz(D,\tau,b,R)/$ $/dD < 0$ teljesül.

Társadalmi jólét és egyensúly

Az egyéni modellt a következőképpen fejlesztjük tovább. Először meg kell adnunk a (D, ε) egyéni jellemzők $F(D, \varepsilon)$ valószínűségeloszlási függvényét, amely nem feltétlenül normált. Ekkor a (τ-tól és b-től függő) az egy időpontban született egyénekből álló *korosztály nettó életpálya-járuléka*

$$\begin{aligned} Z[\tau,b] &= \int z(D,\varepsilon,\tau,b,R(D,\varepsilon))dF \\ &= \int \{\tau R(D,\varepsilon) - b(R(D,\varepsilon))[D - R(D,\varepsilon)]\}\, dF \end{aligned} \tag{10}$$

és az aggregált egyensúlyi feltétel a következő:

$$Z[\tau,b] = 0. \tag{11}$$

Egyébként a stacionaritási feltevés miatt a korosztályi nettó életpálya-járulék egyenlő a társadalom keresztmetszeti nettó járulékával.

Legyen $U^*(D, \varepsilon, \tau, b)$ a (D, ε)-típusú egyén *maximális hasznossága*, adott τ járulékkulcs és b járadékfüggvény esetén. A legegyszerűbb *társadalmi jóléti függvény* az egyéni hasznosságmaximumok aggregált értéke:

$$V[\tau,b]=\int U^*(D,\varepsilon,\tau,b)dF. \tag{12'}$$

Az általános esetben az aggregálás előtt az egyéni hasznosságmaximumokat egy φ skalár–skalár növekvő és konkáv függvénnyel transzformáljuk:

$$V[\tau,b]=\int \psi(U^*(D,\varepsilon,\tau,b))dF. \tag{12}$$

Az irodalomban (*Atkinson–Stiglitz* [1980]) három fontos speciális esetet szoktak vizsgálni: *1. utilitarizmus*: $\psi = 1$, *2.* Cobb–Douglas-függvény: $\psi(U^*) = \log U^*$, feltéve, hogy $U^* > 0$ és *3.* a Rawls-féle függvényt: az egyéni optimumok minimumát. E három speciális eset közös általánosítása a $\psi(U^*) = \phi^{-1}U^{*\phi}$ ($\phi \le 1$) függvénycsalád. (A harmadik esetben első látásra nincs ψ függvényünk, ha azonban $\phi \to -\infty$, akkor határesetben a Rawls-függvényt kapjuk.)

Felvetődik a kérdés, hogy nem kellene-e az egyéni hasznosságfüggvényt az élettartammal elosztva súlyozni a társadalmi jóléti függvényt. Ha a népességre vonatkozó stacionaritási feltevésre gondolunk, akkor láthatjuk, hogy nem kell/szabad súlyozni. Egyébként a tb-nyugdíjak esetében sem csökkentik a női életjáradékot azért, mert a nők várhatóan tovább élnek, mint a férfiak.

A kormányzatnak olyan τ járulékkulcsot és $b(\cdot)$ járadékfüggvényt kell választania, amely esetén a (12) társadalmi jóléti függvény maximális a (10)–(11) korlát mellett.

Mielőtt az optimális ösztönzést megvizsgálnánk, definiáljuk a két népszerű járadékfüggvényt: az úgynevezett tisztességes és a lineáris függvényt.

Naiv járadékfüggvény

A szakirodalomban (például *Gruber–Wise* [1999]) nagyon népszerű az úgynevezett *biztosításmatematikailag tisztességes járadékfüggvény*:

$$\tilde{b}(R)=\frac{\tau R}{D^*-R}, \tag{$\widetilde{13}$}$$

ahol D^* a kormányzat torzítatlan becslése a népesség várható (átlagos) élettartamáról. A képlet az életjáradékot az τR életpálya-járulék és ($D^* - R$) hátralévő élettartam hányadosaként állapítja meg, burkoltan feltéve, hogy D és R független egymástól. Ez a feltevés empirikusan (*Waldron* [2001]) és a 2. következmény szerint logikailag is hamis, ezért mi a *naiv* jelzővel illetjük a továbbiakban.

A naiv járadékfüggvény esetén a *2. tétel* folyománya a *3. következmény*.

3. következmény. *Egy jól viselkedő U hasznosságfüggvény, a naiv ($\widetilde{13}$) járadékfüggvény és adott τ járulékkulcs esetén, az optimális szolgálati ideje ($\tilde{R}$) a következő implicit egyenlet pozitív megoldása:*

$$u(\varepsilon,1-\tau)-v(\varepsilon,b)+v_b'(\varepsilon,\tilde{b})\tau\frac{D^*}{(D^*-R)^2}(D-R)=0. \tag{$\tilde{7}$}$$

Megjegyzések. 1. Ha egydimenziós esettel állunk szemben, akkor adott hasznosságfüggvény esetén nagyobb élettartam hosszabb szolgálati időt von maga után; adott élettartam esetén pedig a nagyobb fogyasztási együttható hosszabb szolgálati időt von maga után.

2. *Simonovits* [2001] igazolta, hogy amennyiben a szolgálati idő növekvő függvénye az egyéni élettartamnak, akkor az aggregált egyenleg negatív: $\tilde{Z} < 0$.

2. táblázat
Egyéni optimumok naiv ösztönzőknél

Egyéni élet-tartam (év) (D)	Fogyasztási rugalmasság (ε)	Szolgálati idő (év) ($\widetilde{R}$)	Helyettesítési arány ($\widetilde{\beta}$)	Egyéni életpálya	
				egyenleg ($\widetilde{z}$)	hasznosság (U^*)
45	0,32	30,6	0,351	1,4	–76,5
	0,35	32,5	0,413	1,7	–74,9
	0,38	34,0	0,476	1,9	–73,0
50	0,32	32,5	0,416	0	–81,8
	0,35	34,5	0,496	0	–79,9
	0,38	36,1	0,579	0	–77,8
55	0,32	34,5	0,499	–2,0	–86,5
	0,35	36,5	0,605	–2,5	–84,3
	0,38	38,1	0,717	–2,9	–81,9

Szemléltetésül a következő paraméterértékeket választjuk: $\lambda^* = 0{,}4$; $\varepsilon^* = 0{,}35$; $D^* =$ 50 év. Ha a kormányzat a kétszeresen átlagos egyénnel azonosulva optimalizál, akkor a $\tau^* = 0{,}183$ nyugdíjjárulékot választja.

Az aggregált adatok a következők. Az aggregált teljes kereset $\widetilde{W} = 309{,}3$ és a járuléktömeg $\widetilde{T} = 56{,}5$. Ehhez képest a befizetési hiány nem túl nagy, de nem is elhanyagolható: $\widetilde{Z} = -2{,}4$. Az aggregált jólét alig kisebb, mint az autark optimumnál: $\widetilde{V} = -716{,}6$.

Az egyéni értékekre térve, látható, hogy mennyire nő az optimális szolgálati idő az egyéni életkorral és a fogyasztási rugalmassággal: ha az élettartam 5 évvel nő, vagy ha a hasznosság fogyasztás szerinti rugalmassága 0,03-tel nő, akkor az optimális szolgálati idő körülbelül 2 évvel nő (vö. *3. következmény 1. megjegyzés*). Külön felhívjuk a figyelmet, hogy – kivéve a középső harmadot, ahol az egyéni élettartam megegyezik a kormányzati becsléssel – a befizetések éves egyenlege nincs egyensúlyban: az első harmadban a rövid életűek minden szolgálati évben többet fizetnek be, mint ami járna; a harmadik harmadban viszont a hosszabb életűek kevesebbet (vö. *2. következmény*). A kilengés mindkét irányban annál nagyobb, minél szorgalmasabb az illető. Végül vegyük észre, hogy – ellentétben a (6)-tal – most a szolgálati idők tényleg nem arányosak az élettartamokkal: $32{,}5/34{,}5 = 0{,}942 \neq 45/50 = 0{,}9$.

Azt a *2. táblázatból* is láthatjuk, hogy ha rövid élettartamú és szorgalmas egyént (3. sor) párosítunk hosszú élettartamú és kényelemszerető egyénnel (7. sor), akkor az aggregált egyenleg –0,1; tehát a kormányzat ezúttal alig veszít. Vegyük észre, hogy itt a rövidebb életű egyén alig dolgozik kevesebbet (34 évet), mint a hosszabb életű (34,5 évet), s ezért majdnem megfordul az aggregált egyenleg előjele!

Lineáris járadékfüggvény

A gyakorlatban sokkal elterjedtebb azonban a *lineáris járadékfüggvény*:

$$b(R) = \gamma + \alpha R, \qquad (\hat{13})$$

ahol γ a nulla szolgálati időhöz tartozó járadék és α az egy szolgálati évért járó többletjáradék.

A *2. tétel* alapján adódik a *4. következmény*.

4. következmény. *Jól viselkedő U hasznosságfüggvény, a ($\hat{13}$) lineáris b(R) járadékfüggvény és τ járulékkulcs esetén az optimális R(D) szolgálati idő–élettartamfüggvény kielégíti a következő egyenletet:*

$$u(\varepsilon,1-\tau)-v(\varepsilon,\gamma+\alpha R)+v_b'(\varepsilon,\gamma+\alpha R)\alpha(D-R)=0. \qquad (\hat{7})$$

Most a következő összefüggések állnak:

$$U^*(D,\varepsilon,\tau,\alpha,\gamma)=\max_R U(D,\varepsilon,\tau,\alpha,\gamma,R)$$

és a (12)-beli *V funkcionál* a

$$V(\tau,\alpha,\gamma)=\int\psi(U^*(D,\varepsilon,\tau,\alpha,\gamma))dF$$

közönséges háromváltozós függvényre egyszerűsödik, amelyet a (10)–(11) korlát mellett kell maximálizálni.

Egy absztrakt ösztönzési feladat

Az optimális ösztönzési feladat megoldását áttekinthetőbbé teszi a következő absztrakt feladat elemzése.

Egyéni optimum

A kormányzati befolyást egy m_G-dimenziós q vektor írja le. Tegyük föl, hogy minden egyént egy m_P-dimenziós p paramétervektor jellemez, amelynek eloszlásfüggvénye $F(p)$. Az egyén hasznossága $U(p, q, e)$, a p, q paraméterek és az n-dimenziós e egyéni döntés sima függvénye. Feltesszük, hogy az optimális $e(p, q)$ döntésfüggvény kielégíti az elsőrendű $U_e'(p,q,e(p,q))=0$ feltételt és a maximumérték

$$U^*(p,q) = U[p,q,e(p,q)]. \qquad (14)$$

Társadalmi optimum

Legyen a társadalmi jóléti függvény

$$V(q)=\int\psi(U^*(p,q))dF(p). \qquad (15)$$

Legyen $g(p, q, e)$ az egyén egyenlegfüggvénye. Ekkor teljesül egy aggregált korlát is:

$$\int g(p,q,e(p,q))dF(p)=0. \qquad (16)$$

Ekkor igaz a *3. tétel.*

3. tétel. *Ha a kormányzat maximalizálja a (15)-beli V(q) társadalmi jóléti függvényt a (16) korlát mellett, akkor létezik olyan μ skalár, amelyre*

$$\int\{\psi(U_q'(p,q))+\mu g_q'(p,q,e(p,q))-\mu g_e'(p,q,e(p,q))U_{tt}''(p,q)^{-1}U_{eq}''(p,q)\}dF(p)=0, \qquad (17)$$

ahol U''_{eq} és U''_{ee} rendre $n \times m_G$-es és $n \times n$-es mátrix, a kitevőben a – 1 pedig inverz mátrixra utal.

Megjegyzések. 1. A (17) egyenletrendszernek (m_G + 1) ismeretlene és ugyanennyi egyenlete van, tehát tipikusan a feladat meghatározott.

2. A szükséges feltétel elégségessége is vizsgálható, például $\mathcal{L}$ konkavitásán keresztül, de ezzel a kérdéssel a tanulmányban nem foglalkozunk.

Bizonyítás. Felírjuk a feladat Lagrange-függvényét:

$$\mathcal{L}(q) = \int \{\psi(U^*(p,q)) + \mu g(p,q,e(p,q))\} dF,$$

és vesszük a q vektor szerinti parciális deriváltakat:

$$\mathcal{L}'_q(q) = \int \{\psi'(U^*_q) U^{*\prime}_q(p,q) + \mu g'_q(p,q,e(p,q)) + \mu g'_e(p,q,e(p,q)) e'_q(p,q)\} dF.$$

Alkalmazva a burkológörbe-tételt $(U^{*\prime}_q = U'_q)$ és az implicit függvény tételét $U'_e(p,q,e) =$ $= 0$-ra, a V feltételes maximumának feltételéből $(\mathcal{L}'_q(q) = 0)$ adódik az optimum szükséges feltétele (vö. *Sydsater–Hammond* [2000] 18. fejezet).

Az optimális járulékkulcs és a lineáris járadékfüggvény

Most pedig lefordítjuk az absztrakt feladatot a nyugdíjösztönzés nyelvére*:* $p = (D, \varepsilon)$, $q =$ $= (\tau, \alpha, \gamma)$ és $e = R$, azaz $m_P = 2$, $m_G = 3$ és $n = 1$, $g = \tau R - (\gamma + \alpha R)(D - R)$.

A *3. tétel* speciális eseteként adódik a *4. tétel.*

4. tétel. *Ha a τ járulékkulcs és a ($\hat{13}$) lineáris járadékfüggvény optimális, akkor τ, α, γ* és *μ a (10)–(11) egyenlet mellett kielégíti a*

$$\int \{-\psi' u'_a R + \mu R + \mu\varphi u'_a / Q\} dF = 0,$$

$$\int \{\psi' v'_b R(D-R) - \mu R(D-R) - \mu\varphi[\alpha v''_{bb} R(D-R) + v'_b(D-2R)]/Q\} dF = 0,$$

$$\int \{\psi' v'_b (D-R) - \mu(D-R) - \mu\varphi[\alpha v''_{bb}(D-R) - v'_b]/Q\} dF = 0$$

egyenleteket is, ahol

$$\varphi = \tau - \alpha D + 2\alpha R + \gamma, \qquad Q = \alpha^2 v''_{bb}(D-R) - 2\alpha v'_b;$$

és $R(D, \varepsilon, \tau, \alpha, \gamma)$ kielégíti a ($\hat{7}$) egyéni optimalitási feltételt is, továbbá τ, α és μ pozitív.

Megjegyzés. A Lagrange-módszer alkalmazásánál megszokott helyzet áll elő: négy ismeretlenünk és négy egyenletünk van, amely tipikus esetben megoldható.

Bizonyítás. $g'_R = \varphi$. Továbbá

$$U'_\tau = -u'_a R, \quad g'_\tau = R, \quad R'_\tau = -\frac{U''_{R\tau}}{U''_{RR}} = \frac{u'_a}{Q};$$

$$U'_\alpha = v'_b R(D-R), \quad g'_a = -R(D-R), \quad R'_\alpha = -\frac{U''_{R\alpha}}{U''_{RR}} = -\frac{\alpha v''_{bb} R(D-R) + v'_b(D-2R)}{Q};$$

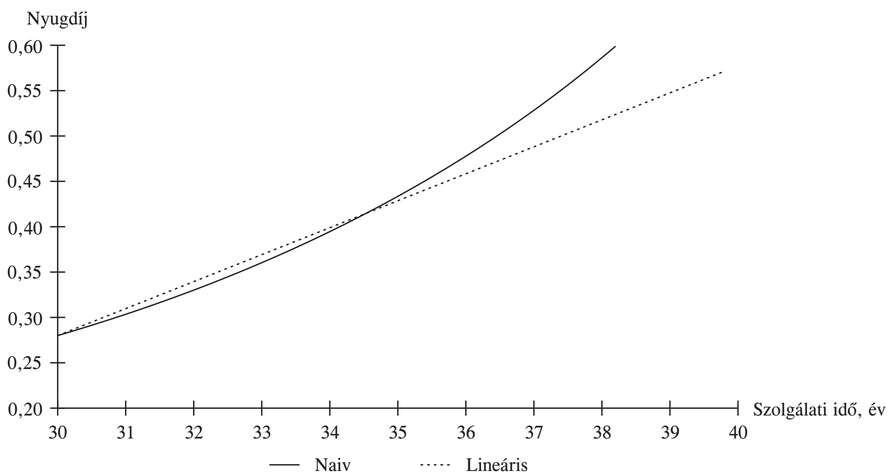
$$U'_\gamma = v'_b(D-R), \quad g'_\gamma = -D + R, \quad R'_\gamma = -\frac{U''_{R\gamma}}{U''_{RR}} = \frac{-\alpha v''_{bb}(D-R) + v'_b}{Q}.$$

Ismét a CRRA-hasznosságfüggvényt tekintjük, és az utilitarista társadalmi jóléti függványt: $\psi(U) = U$. Ekkor $u'_a(\varepsilon,a) = \lambda^{\sigma\varepsilon}a^{\sigma\varepsilon-1}$ és $v'_b(\varepsilon,b) = b^{\sigma\varepsilon-1}$, tehát a tételben szereplő egyenletrendszer viszonylag könnyen programozható.

Belátható, hogy $\tau = 0{,}191$ a társadalmilag optimális járulékkulcs, illetve $\alpha = 0{,}03$ és $\gamma = -0{,}62$ az optimális járadékfüggvény két paramétere. A középső egyénhez tartozó $\hat{b} = 0{,}382$ normálnyugdíjjal számolunk, amelynek a helyettesítési aránya $\hat{\beta} = \hat{b}/(1 - \tau) = 0{,}382/0{,}819 = 0{,}467$.

A naiv és a lineáris ösztönzést az *1. ábrán* mutatjuk be.

1. ábra
Naiv és lineáris ösztönzés



Bemutatjuk az optimális lineáris járadékfüggvényhez tartozó egyéni optimumokat.

3. táblázat
Egyéni optimumok lineáris ösztönzésnél

Egyéni élettartam (D)	Fogyasztási rugalmasság (ε)	Szolgálati idő (év) ($\hat{R}$)	Helyettesítési arány ($\hat{\beta}$)	Egyéni életpálya: egyenleg ($\hat{z}$)	Egyéni életpálya: hasznosság ($\hat{U}$)
45	0,32	31,0	0,381	1,6	–76,6
	0,35	32,1	0,422	1,7	–75,0
	0,38	33,2	0,460	1,9	–73,2
50	0,32	32,1	0,423	0,0	–81,7
	0,35	33,3	0,467	0,0	–80,1
	0,38	34,5	0,509	0,2	–78,3
55	0,32	33,2	0,462	–1,8	–86,6
	0,35	34,5	0,509	–1,9	–84,9
	0,38	35,7	0,554	–1,9	–83,1

Az aggregált adatok a következők. A $\hat{Z} = -0{,}03$ (kerekítési hiba) és $\hat{V} = -719{,}4$; az aggregált teljes kereset $\hat{W} = 299{,}5$. Csupán még egy változásra hívjuk föl a figyelmet: a tompítás hatására a szorgalmas és hosszú életű dolgozó esetében (az utolsó sor) az optimális szolgálati idő 38,1-ről 35,7 évre csökken, a helyettesítési arány pedig 71,7-ről 55,4 százalékra. Nem meglepő tehát, hogy az életpálya nettó befizetés –2,9-ről –1,9-re nő.

Aláhúzzuk, hogy abszolút skála helyett relatív skálával szoktak dolgozni: ekkor $\kappa = b'/b = \alpha[(1-\tau)\beta] = 0{,}0794$ elég közel esik az amerikai értékhez. Figyelembe kell azonban venni, hogy Amerikában a 35 év fölötti szolgálati idő általában nem növeli a nyugdíjszámításban figyelembe vett mutatót. Ugyanakkor társadalmi optimumunk látszólag sokkal nagyobb, mint a magyar vagy német mutató: 3,6 százalék. Ha azonban figyelembe vesszük, hogy Magyarországon is, de főleg Németországban minden további szolgálati év jelentősen növeli a nyugdíjat, akkor az összehasonlíthatósághoz a 3,6 százalékot megfelelően növelni kell. Például német példával élve $R^* = 45$ év, $b^* = 0{,}7 \times 0{,}8 = 0{,}56$; tehát $\kappa = b'/b = 0{,}5724 \times 1{,}036/0{,}56 - 1 = 0{,}059$ a releváns érték.

Most pedig bemutatjuk a *4.* összefoglaló *táblázatot.*

4. táblázat

Három rendszer aggregált összehasonlítása

Ösztönzési rendszer	Aggregált teljes kereset (W, év)	Járulék-kulcs (τ)	Meredekség (α)	Aggregált nettó járulék (Z)	Társadalmi jólét (V)
Autark optimum	313,5	–	0,04	0	–715,5
Naiv ösztönzés	309,3	0,183	0,04	–2,4	–716,6
Lineáris ösztönzés	299,5	0,191	0,03	0	–719,4

Látható, hogy a lineáris ösztönzés társadalmi jóléti függvény maximuma alig marad el az autark optimum értékétől. Bár a jóléti függvény numerikus értéke önkényes, véleményem szerint mégis érdemes értékével foglalkozni, ha már az egyéni értékeket elfogadtuk az aggregálás alapjául.

Végül az optimális tervezéselmélet alapján megfogalmazunk egy sejtést.

1. sejtés. *Az optimális lineáris járadékfüggvény meredeksége kisebb, a járulékkulcs pedig nagyobb, mint a naiv ösztönzésnél (a kormányzati optimumban).*

*

Az optimális mechanizmustervezés elméletét alkalmazva a lehető legegyszerűbb modellben meghatároztuk az optimális lineáris járadékfüggvényt és a hozzá tartozó járulékkulcsot. Elhanyagoltunk több nagyon fontos tényezőt: a keresetek korfüggését és heterogenitását, a munkába lépési idők különbözőségét, végül, de nem utolsósorban, az adórendszer hatását. Ebben a végletekig lecsupaszított modellben is érdekes eredményeket kaptunk. További kutatásnak kell tisztázni a kapott eredmények robusztusságát. Amit már ma is megtudtunk, hogy az úgynevezett tisztességes járadékfüggvény biztosításmatematikailag nem tisztességes.

Hivatkozások

Atkinson, A. B.–Stiglitz, J. E. [1980]: Lectures on Public Economics. McGraw-Hill, London.

Diamond, P. [2001]: Taxation, Incomplete Markets and Social Security. MIT Press, Munich Lectures, Cambridge, MA.

Diamond, P.–Mirrlees, J. [1978]: A Model of Social Insurance with Variable Retirement. Journal of Public Economics, 10. 295–336. o.

Eső Péter–Simonovits András [2002]: Designing Optimal Benefit Rules for Flexible Retirement. Discussion Paper CMS-EMS 1535, Northwestern University.

Friedmann, B. M.–Warshawski, M. J. [1990]: The Cost of Annuities: Implications for Saving Behavior and Bequests. Quarterly Journal of Economics, 105. 135–154. o.

Gömöri András [2001]: Információ és interakció. Typotex, Budapest.

Gruber, J.–Wise, D. A. (szerk.). [1999]: Social Security and Retirement Program Around the World. Chicago University Press, Chicago.

Mirrlees, J. A. [1971]: An Exploration in the Theory of Optimum Income Taxation. Review of Economic Studies, 38. 175–208. o.

Sheshinski, E. [1972]: The Optimal Linear Income Tax. Review of Economic Studies, 39. 297–302. o.

Sheshinski, E. [1978]: A Model of Social Security and Reirement Decisions. Journal of Public Economics, 10. 337–360. o.

Simonovits András [2001]: Szolgálati idő, szabadidő és nyugdíj: ösztönzés korlátokkal. Közgazdasági Szemle, 291–306. o.

Sydsater, K.–Hammond, P. [2000]: Matematika közgazdászoknak. Aula, Budapest.

Waldron, H. [2001]: Links between Early Retirement and Mortality. ORES Working Paper 93, Division of Economic Research, SS Administration.

Vincze János [1991]: Fejezetek az információ közgazdaságtanából: I. A morális kockázat, II. A kontraszelekció, III. Morális kockázat és kontraszelekció az időben. Közgazdasági Szemle, 134–152. o., 289–306. o. és 435–445. o.