Kiss Gábor – Őri István

Matematika-tanítás Excel programcsomaggal

Mintafeladatokon keresztül mutatjuk meg az Excel lehetőségeit a valószínűség-számítás, a statisztika és a lineáris algebra tanításában. Természetesen az Excel nem képes felvenni a versenyt a kifejezetten matematikai, illetve statisztikai programcsomagokkal összetett, bonyolult problémák megoldásában, de lehetőséget biztosít az oktatóknak, hogy a hallgatókkal jobban megértethessék a fogalmakat, a közöttük lévő kapcsolatokat, az eljárásokat, a próbákat, valamint a tanulók könnyen és gyorsan ellenőrizhessék számításaikat.

Sokféle matematikai és ezen kívül többféle kifejezetten statisztikai programcsomag kapható napjainkban, amelyekkel rendkívül sokféle problémát lehet megoldani. Ezek a programok azonban általában drágák, gyors és nagy kapacitású számítógépeket igényelnek, sokszor a kezelésük sem könnyű. Az Excel ezzel szemben olcsó, könnyen kezelhető programcsomag, melynek nem túl nagyok a számítógéppel szemben támasztott igényei, így a hallgatók nemcsak a főiskolákon, hanem otthon a saját gépükön és a főiskola elvégzése után új munkahelyükön is nagy haszonnal alkalmazhatják felmerülő problémáik megoldására. A hallgatók önállóan dolgozva, a számítógép segítségével igen számításigényes feladatokat képesek megoldani viszonylag gyorsan és könnyedén, és emellett jobban átlátják a megoldandó kérdéseket, hatékonyabban sajátítják el a tudást.

A valószínűség-számítás tanítása az Excel segítségével

Az Excel alkalmas a valószínűség-számítási feladatok kapcsán felmerülő egyszerűbb kombinatorikai számítások elvégzésére, permutációk, variációk és kombinációk meghatározására.

1. feladat: 18 diák vesz részt a futóversenyen. Hányféleképpen futhat be az első három helyezett a célba?

Megoldás: 18 különböző elemből kell kiválasztanunk hármat ismétlés nélkül, a sorrend számít, ez 18 elem 3-ad osztályú ismétlés nélküli variációinak a száma, melyet az Excel VARIÁCIÓK függvényének segítségével számolhatunk ki. A kiválasztott cellába VARIÁCIÓK(18;3) {angol nyelvű program esetén PERMUT(18;3)} beírása után megjelenik a 4896 eredmény. A továbbiakban kapcsos zárójelben mindig megadjuk a megfelelő angol nyelvű függvényt is. Az előző feladathoz hasonlóan lehet kombinációk számát meghatározni: például 90 elem 5-öd osztályú ismétlés nélküli kombinációnak száma a KOMBINÁCIÓK(90;5) {COMBIN} függvény alkalmazásával számolható ki.

Az Excel segítségével számos nevezetes valószínűség-eloszlásra vonatkozó feladat oldható meg.

2. feladat: Mekkora a valószínűsége, hogy 5 újszülött között 2 lány van, ha egyforma valószínűséggel születnek a lányok és a fiúk?

Megoldás: Az újszülött lányok száma binomiális eloszlású valószínűségi változó n=5 és p=0,5 paraméterekkel. A feladatra a választ a BINOM.ELOSZLÁS(2;5;0,5; hamis) {BINOMDIST} beírásával kaphatjuk meg, ahol a paraméterek jelentése a következő:

1. paraméter: kedvező esemény bekövetkezésének száma: k=2
2. paraméter: összes kísérletek száma: n=5
3. paraméter: kedvező esemény bekövetkezésének valószínűsége: p=0,5
4. paraméter: logikai változó, melynek értékét hamisra állítva a kérdezett valószínűséget kapjuk meg. Ha a logikai változó értéke igaz, akkor annak a valószínűségét kapjuk meg, hogy legfeljebb 2 lány van az újszülöttek között, azaz azon valószínűségek összegét, amelyekre k kisebb vagy egyenlő, mint 2.

Hasonlóképpen oldhatók meg hipergeometrikus és Poisson-eloszlásra vezető feladatok a HIPERGEOM.ELOSZLÁS {HYPGEOMDIST} és a POISSON {POISSON} függvények alkalmazásával.

Az Excel képes számos folytonos valószínűségi változóval kapcsolatos feladat megoldására is.

3. feladat: Deszkák hossza normális eloszlást mutat 400 cm várható értékkel és 3 cm szórással. Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott deszka hossza kisebb, mint 398 cm?

Megoldás: A NORM.ELOSZL(398;400;3;igaz) {NORMDIST} beírásával megkapjuk az eredményt: 0,252. Az egyes paraméterek jelentése a következő:

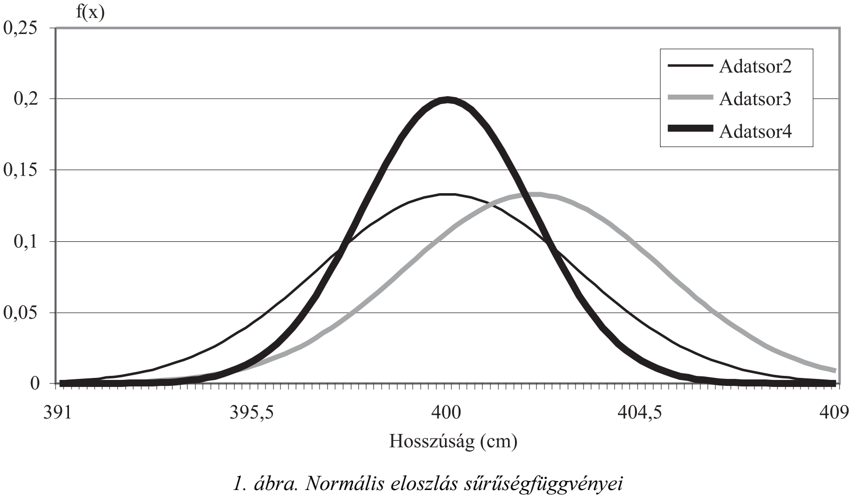
1. paraméter: az érték, aminél kisebb a valószínűségi változó értéke: x=398
2. paraméter: a valószínűségi változó várható értéke: m=400
3. paraméter: a valószínűségi változó szórása: =3
4. paraméter: logikai változó, melynek értékét igazra állítva az eloszlásfüggvény értékét kapjuk meg az x helyen, azaz a kérdezett valószínűségét. Ha a logikai változó értéke hamis, akkor a sűrűségfüggvény értékét kapjuk meg az x helyen.

Lehetőség van a fordított kérdés megválaszolására is.

4. feladat: Az előző feladatban a deszkák 25%-a milyen felső korlát alatt lesz?

Megoldás: Ismerjük a valószínűséget: 0,25 és keressük azt az x értéket, amelyre az eloszlásfüggvény ezt veszi fel. A választ az INVERZ.NORM(O,25;400;3) {NORMINV} kifejezés adja meg: ez 397,9 elvárásaink szerint.

Hasonlóképpen oldhatók meg exponenciális, Weibull, lognormális, béta, gamma, F, t és khi-négyzet eloszlásra vezető feladatok a megfelelő függvények alkalmazásával. Nincs szükségünk táblázatokra, a keresett értékeket az Excel megfelelő függvényének alkalmazásával határozhatjuk meg.



1. ábra. Normális eloszlás sűrűségfüggvényei

Az Excel segítségével mind diszkrét, mind folytonos valószínűségi változó esetén ábrázolhatjuk az eloszlásokat jellemző függvényeket. Például normális eloszlást vizsgálva a diákok maguk változtathatják az eloszlás várható értékét és szórását, és megfigyelhetik a sűrűségfüggvény változását, megtapasztalhatják, hogyan változik a haranggörbe alakja, ha csökkentik a szórást vagy növelik a várható értéket.

Például az *1. ábrá*n az Adatsor2 és az Adatsor3 esetében a szórás megegyezik, de az Adatsor3-nak nagyobb a várható értéke, ezért a haranggörbe jobbra tolódott el. Az Adatsor2-nek és az Adatsor4-nek ugyanakkora a várható értéke, de az Adatsor4-nek kisebb a szórása, ezért csúcsosabb a haranggörbe.

Matematikai statisztika tanítása az Excel segítségével

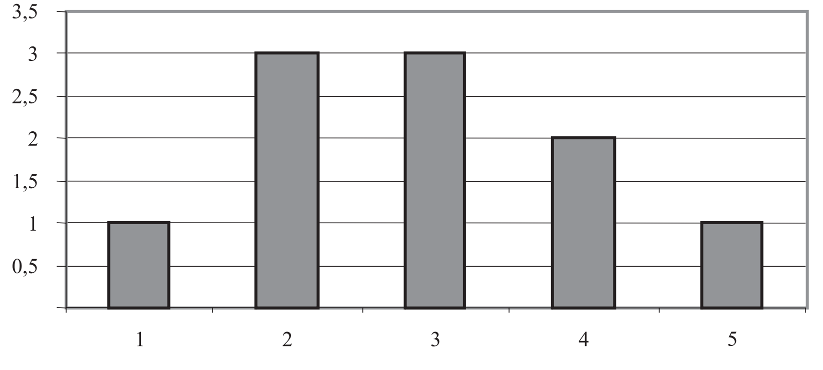
Az Excel rendelkezik olyan statisztikai eszközökkel, amelyeket a hallgatók alkalmazni tudnak többféle adat feldolgozásában. A felhasználók ábrázolhatják adataikat a munkalapokon hisztogramként, poligonként, vagy kördiagram formájában. Az adatok ilyen megjelenítése elősegíti az összefüggések könnyebb felismerését. Az Excel segítségével a minta számos fontos jellemzőjét ki tudjuk számolni: átlag, medián, módusz, szórás, percentilisek stb.

5. feladat: Határozzuk meg az alábbi 10 elemű minta átlagát, mediánját, móduszát, korrigált tapasztalati szórását!

Mintaértékek: 1; 2; 2; 2; 3; 3; 3; 4; 4; 5.

Megoldás: A megfelelő értékeket például az A1 cellától az A10 celláig beírva, majd az ÁTLAG(A1:A10) {AVERAGE}, MEDIÁN(A1:A10) {MEDIAN}, MÓDUSZ(A1:A10) {MODE}, SZÓRÁS(A1:A10) {STDEV} függvények felhasználásával megkapjuk a kívánt adatokat: átlag = 2,9, medián = 3, módusz = 2, korrigált tapasztalati szórás = 1,197.

Hasonlóképpen határozható meg a minta legkisebb és legnagyobb eleme, számolható ki az átlagos eltérés, a minta ferdesége, csúcsossága, kvartilisek és percentilisek, az adatok mértani, illetve harmonikus középe. Természetesen lehetőség van a tapasztalati eloszlás- és sűrűségfüggvény ábrázolására is. Ha a fenti mintaértékek az A1:A10 tömbben, a lehetséges értékek (1; 2; 3; 4; 5) a C10:C15 tömbben vannak, akkor a GYAKORISÁG(A1:A10;C10:C15) {FREQUENCY} függvény megadja az egyes értékek gyakoriságát és ezután az Excel diagramkészítő lehetőségeit felhasználva megrajzolhatjuk a gyakorisági hisztogramot (*2. ábra).*



2. ábra A minta gyakorisági hisztogramja

Az Excelt nemcsak a leíró statisztikában alkalmazhatjuk, hanem a sokaság ismeretlen paramétereinek becslésében is.

6. feladat: Egy alkatrész gyártási ideje közelítőleg normális eloszlású valószínűségi változó. A 50 elemű minta átlaga 115 s, korrigált tapasztalati szórása 5,4 s. 95 százalékos biztonsággal milyen intervallumba esik az egész sokaság várható értéke?

Megoldás: 95 százalékos megbízhatósági intervallum meghatározása a feladat. A MEGBIZHATÓSÁG(0,05;5,4;50) {CONFIDENCE} függvény segítségével meghatározhatjuk a fél intervallum hosszát: 1,5 és ezt az átlaghoz hozzáadva, illetve levonva megkapjuk a kérdezett konfidencia-intervallumot: [113,5; 116,5].

A MEGBÍZHATÓSÁG sajátfüggvényben az egyes paraméterek jelentése a következő:
1. paraméter: a szignifikancia-szint: = 0,05, mert a konfidenciaszint = 100(1-) százalék
2. paraméter: a minta korrigált tapasztalati szórása: $\alpha = 5,4$
3. paraméter: a minta elemszáma: n = 50.

A hallgatóknak nagyon hasznos, ha a paraméterek változtatásával megvizsgálják, hogyan változik a megbízhatósági intervallum hossza. Például a szignifikancia-szint csökkentésével =0,01, azaz a megbízhatósági szint 99 százalékra növelésével 1,97-ra nő a fél intervallum hossza, illetve a minta elemszámának növelésével csökken az intervallum hossza. =0,01 mellett az elemszámot 70-re növelve a MEGBIZHATÓSÁG(0,01;5,4;70) függvény értéke 1,66, ami az intervallum hosszának csökkenését jelenti.

Számos próbát is végrehajthatunk az Excel segítségével: egy- és kétmintás t-próba, F-próba, khi-négyzet próba stb.

7. feladat: Két gyártósoron dolgozó munkások ugyanazt a feladatot hajtják végre. Az *1. táblázat* tartalmazza a megfelelő adatokat. A két gyártósor ugyanakkora varianciával dolgozik? Válaszoljunk 95 százalékos konfidenciaszinten, feltételezve, hogy az adatok normális eloszlásból származnak!

Megoldás: Nullhipotézisünk, hogy a két variancia egyenlő, az ellenhipotézisünk, hogy a két variancia nem egyenlő és a szignifikancia szint 0,05. Az első gyártósor adatai legyenek a TÖMB1 nevű tömbváltozóban, a második gyártósor adatai legyenek a TÖMB2-ben.

1. táblázat. A feladat végrehajtási ideje percekben

1. gyártósor	3	4	6	8	5	4	6	7
2. gyártósor	6	7	6	4	6	8	6	5

A VAR függvény 2,84-et ad TÖMB1 esetén és 1,43-at TÖMB2 beírásakor, hányadosuk: 1,99. A DARAB függvény megadja egy tömbváltozó elemeinek számát. Nincs szükségünk táblázatra, mert az INVERZ.F(0,05, DARAB(TÖMB1)-1, DARAB(TÖMB2)-1) függvény megadja a keresett értéket: 3,78. Ez nagyobb, mint a varianciák hányadosára kiszámolt 1,99, így 95 százalékos biztonsági szinten nem vetjük el nullhipotézisünk, a két gyártósor varianciájának egyenlőségét.

Az Excelt alkalmazhatjuk korreláció- és regresszió-számításra is.

8. feladat: Számítsuk ki a 2. táblázat x-y adatai közötti lineáris korrelációs együtthatót!

Megoldás: Legyenek az x értékek a B10:B17 és az y értékek a C10:C17 tömbökben. A KORREL(B10:B17,C10:C17) {CORREL} alkalmazásával 0,977-et kapunk, ami a változók közötti erős pozitív lineáris korrelációt jelzi. Ezután felírhatjuk a regressziós egyenes egyenletét.

A LIN.ILL(C10:C17;B10:B17;igaz;hamis) {LINEST} függvény megadja a regressziós egyenes meredekségét és tengelymetszetét is.

Az egyes paraméterek jelentése a következő:
1. paraméter: az y értékek tömbje
2. paraméter: az x értékek tömbje

3. paraméter: logikai változó, melynek értékét igazra állítva a tengelymetszet kiszámítása a szokásos módon történik, hamis érték esetén a tengelymetszet értéke 0.

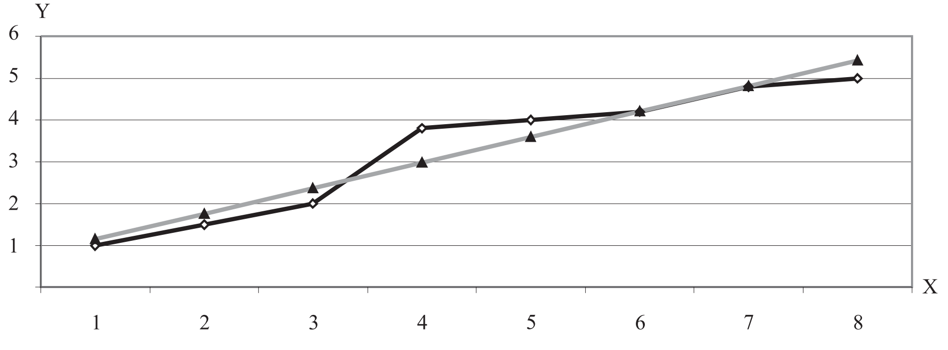
4. paraméter: logikai változó, melynek értékét igazra állítva csak az egyenes meredekségét és tengelymetszetét kapjuk meg, egyébként kiegészítő statisztikai adatokat is megkapunk (meredekség és tengelymetszet hibája stb.).

Lehetőség van a regressziós egyenes ábrázolására. *(3.ábra)* A hallgatók változtathatják az értékeket, és megfigyelhetik, hogyan változik a korrelációs együttható, a regressziós egyenes meredeksége, illetve tengelymetszete, kiszámolhatnak új x értékhez tartozó y értéket.

Ha nem lineáris összefüggés van a két változó között, hanem exponenciális, akkor is hasonlóképpen lehet exponenciális görbét illeszteni az alappontokra, és természetesen előrejelzéseket is ki lehet számolni az Excel segítségével.

2. táblázat. A lineáris korrelációs együttható kiszámításához szükséges adatok

X_I	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0
Y_I	1,0	1,5	2,0	3,8	4,0	4,2	4,8	5,0



3. ábra. A regressziós egyenes

Lineáris algebra tanítása az Excel segítségével

Mátrixok, determinánsok és lineáris egyenletrendszerekkel kapcsolatos fogalmak igen könnyen szemléltethetők az Excel segítségével.

9. feladat: Határozzuk meg az $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix transzponáltját: $\underline{\underline{A}}^T$ és az $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}$ mátrixot, ha

$$\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Megoldás: TRANSZPONÁLÁS (tömb) függvény {TRANSPOSE (array)} megadja a keresett mátrixot:

$$\underline{\underline{A}}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

MSZORZAT (tömb1, tömb2) függvény {MMULT (array1, array2)} gyorsan kiszámolja a két mátrix szorzatát:

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 10 & 8 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$$

10. feladat: Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszert:

$$x_1 + 3x_2 + x_3 = 3$$
$$x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 7$$
$$2x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 12$$

Megoldás: Először átírjuk az egyenletrendszert mátrixos formába:

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{x}} = \underline{\underline{b}}$$

ahol

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 7 & 5 \end{bmatrix}; \ \underline{\underline{x}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{ és } \underline{\underline{b}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 12 \end{bmatrix}$$

A következő lépés $\underline{\underline{A}}$ inverzének meghatározása: $\underline{\underline{A}}^{-1}$, majd ennek segítségével az egyenletrendszer megoldása:

$$\underline{\underline{x}} = \underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{\underline{b}}$$

INVERZ.MÁTRIX(tömb) függvény {MINVERSE(array)} megadja a keresett inverz mátrixot:

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -8 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

és az előbb megismert MSZORZAT függvény segítségével meghatározhatjuk a megoldást:

$$\underline{\underline{x}} = \underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{\underline{b}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

11. feladat: Határozzuk meg $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 8 & 27 & 64 & 125 \end{vmatrix}$ determináns értékét!

Megoldás: MDETERM(tömb) függvény gyorsan kiszámolja a determináns értékét, amely ebben az esetben 12. Ugyanezt a feladatot megoldhatjuk papíron is, kifejtéssel vagy még inkább Gauss-eliminációval és ellenőrizhetjük eredményünket.

12. feladat: Ellenőrizzük az $|\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}| = |\underline{\underline{A}}| \cdot |\underline{\underline{B}}|$ állítás igazságát, ha $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ és $\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Megoldás: MSZORZAT és MDETERM függvények felhasználásával könnyedén ellenőrizhetjük ezen a példán az állítás helyességét:

$$|\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}| = MDETERM(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}) = \begin{vmatrix} 10 & 8 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} = 6$$

$$|\underline{\underline{A}}| \cdot |\underline{\underline{B}}| = MDETERM(\underline{\underline{A}}) \cdot MDETERM(\underline{\underline{B}}) = (-1) \cdot (-6) = 6$$

Számos egyéb függvénnyel rendelkezik az Excel, amely jól használható a valószínűség-számítás, a matematikai statisztika és a lineáris algebra tanításában is, de az összes függvény ismertetésére nincsen lehetőség egy rövid cikkben. Részletesebb leírás található a Microsoft által kiadott kézikönyvekben (‚Function Reference, User's Guide') és például *Kovácsné Cohner Judit* és *Ozsváth Miklós* (1996) vagy *Kovalcsik Géza* (1999) könyvében.

Irodalom

Function Reference. (1992) Microsoft Corporation.
User's Guide. (1992) Microsoft Corporation.
Kovácsné Cohner Judit – Ozsváth Miklós (1996): *Az Excel 5.0 függvényei,* ComputerBooks, Budapest.
Kovalcsik Géza (1999): *Excel´97.* ComputerBooks, Budapest.
Őri I.– Kiss G.: *Teaching Probability Theory and Mathematical Statistics Using Microsoft Excel?* On CD of ITHET 2002, 3rd International Conference on Information Technology Based Higher Education and Training, Budapest, Hungary.